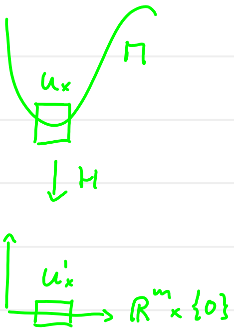
Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Wiederholung & Ergänzung

- $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist m-dim. C^l-UMF von $\mathbb{R}^n$ $(1 \leq l \leq \infty)$, wenn $\forall x \in M\ \exists U_x \subseteq \mathbb{R}^n$ offen & C^l-Diff. $H: U_x \to U_x' \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass „äußere Karte"

$$H(M \cap U_x) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap U_x'$$

- $h: M \cap U_x \to \mathbb{R}^m$ heißt „(innere) Karte" wenn $H/_{M \cap U_x}(x) = h(x) \times \{0\}$



- Eine Familie $\{h_x\}_{x \in X}$ mit „Kartenbereichen" $\{M \cap U_x =: V_x\}$ heißt „Atlas" wenn $\bigcup_x V_x = M$
- $n-m$ heißt „Kodimension" von M
- $x \in \mathbb{R}^n$ heißt „regulärer Punkt" für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, wenn $f'(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv (dazu ist also $n \geq m$ notwendig)
- y ist „regulärer Wert", wenn $f^{-1}(\{y\})$ nur reg. Punkte enth. oder leer ist.

Äquivalente Charakterisierungen:

(1) lokale Parametrisierung mittels $\{h^{-1}\}$

(2) M als lokale Nullstellenmenge einer reg. Fkt., d.h.

$\forall x \in M\ \exists U_x \ni x$ offen, $f \in C^l(U_x \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-m})$ mit $f'(x)$ surjektiv,

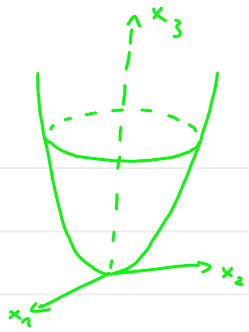
so dass $\quad M \cap U_x = f^{-1}(\{0\}) = \{z \in U_x \mid f(z) = 0\}$

(siehe Satz vom regulären Wert aus Analysis II)

(3) M als lokaler Graph, d.h.

$\forall x \in M\ \exists U_x \ni x$ offen, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^l(V, \mathbb{R}^{n-m})$, so dass

$\exists$ Permutation P: $\quad M \cap U_x = P\{(x,y) \in V \times \mathbb{R}^{n-m} \mid f(x) = y\}$



Bsp.: Paraboloid für $a, b > 0$

$$M := \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid a x_1^2 + b x_2^2 = x_3 \}$$

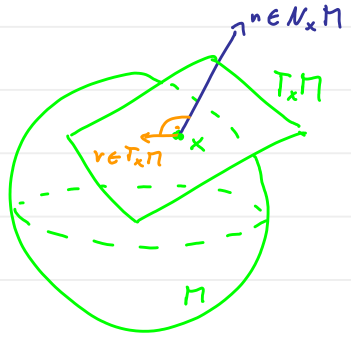
① Parametrisierung: $h^{-1}: \mathbb{R}^2 \to M, \ (x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ a x_1^2 + b x_2^2 \end{pmatrix}$

② Nullstellenmenge von $f(x) = x_3 - a x_1^2 - b x_2^2$

③ Graph von $f(x_1, x_2) = a x_1^2 + b x_2^2$

Tangential- und Normalraum

Idee: Linearisierung einer UMF $M \subseteq \mathbb{R}^n$ am Punkt $x \in M$: $M \approx x + T_x M$



Def.: ∘ Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ C^1-UMF und $x \in M$.

Dann heißt

$$T_x M := \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \gamma \in C^1((-1,1), M) \text{ mit } \gamma(0) = x \text{ und } \dot\gamma(0) = v \}$$

„Tangentialraum" von M an x.

∘ $N_x M := (T_x M)^\perp$ heißt „Normalraum" von M an x.

Bemerkung: $N_x M$ & $T_x M$ sind orthogonale Unterräume des $\mathbb{R}^n$ mit $\dim(T_x M) = m$ und somit $\dim(N_x M) = n - m$.

Satz: Sei M eine m-dim. C^1-UMF des $\mathbb{R}^n$ und $x \in M$.

(i) Ist $h: V \subseteq M \to V' \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte um $x \in V$ mit $h(x) = y$ & $\varphi := h^{-1}$.

Dann ist $\boxed{T_x M = \varphi'(y)\, \mathbb{R}^m}$

(d.h. die Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix der Parametrisierung φ bilden eine Basis des Tangentialraums.)

(ii) Ist $x \in U \subseteq M$ und $U = f^{-1}(\{0\})$ für $f \in C^1(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-m})$, mit regulärem Wert 0 (also Rang $f'(x) = n-m$), dann gilt

$$\boxed{T_x M = \ker[f'(x)]}$$
$$\boxed{N_x M = \operatorname{span}\{\nabla f_1, \dots, \nabla f_{n-m}\}} \quad (*)$$

Beweis: $\to$ Analysis 2. $\square$

Korollar: Ist $h : U \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^3 \to U' \subseteq \mathbb{R}^2$ Karte einer C^1-UMF um $x \in U$ und $\psi := h^{-1}$. Dann gilt mit $y := h(x)$:

$$\boxed{\begin{aligned} &(i) \quad T_x M = \operatorname{span}\{\partial_1 \psi(y), \partial_2 \psi(y)\} \\ &(ii) \quad N_x M = \operatorname{span}\{\partial_1 \psi(y) \times \partial_2 \psi(y)\} \end{aligned}}$$

Beweis:

(i) $T_x M = \psi'(y)\,\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}\{\partial_1 \psi(y), \partial_2 \psi(y)\}$

(ii) folgt aus $(T_x M)^\perp = N_x M$ und Eigenschaft des Kreuzprodukts. $\square$

Integration auf UMFs

Bemerkung: Eine m-dim UMF $M \subseteq \mathbb{R}^n$ hat kein (n-dim.) Volumen für $m < n$. Wir können ihr jedoch ein m-dim. Volumen zuweisen ...

Def.: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $n \geq m$ mit Singulärwerten $\{s_i \geq 0\}_{i=1}^m$. Das „m-dimensionale Volumen" des Parallelotops $A[0,1]^m \subseteq \mathbb{R}^n$ ist:

$$\operatorname{vol}_m(A[0,1]^m) := \prod_{i=1}^m s_i$$

Lemma: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $m \le n$, mit Singulärwerten $\{s_i\}_{i=1}^m$ gilt

$$\prod_{i=1}^m s_i = \sqrt{\det(A^T A)}$$

Beweis: Singulärwertzerlegung: $A = U \Lambda V$ mit U, V orthogonal &

$\Lambda_{kl} = \delta_{kl} s_k$, $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times m}$

Damit ist $\det(A^T A) = \det(V^T \Lambda^T \underbrace{U^T U}_{=\mathbb{1}} \Lambda V)$

$$= \underbrace{\det(V^T)}_{=1} \underbrace{\det(\Lambda^T \Lambda)}_{=\mathrm{diag}(s_1^2 \ldots s_m^2)} \underbrace{\det(V)}_{=1} = \prod_{i=1}^m s_i^2$$

Def.: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m-dim. UMF parametrisiert durch $\psi \in C^1(V \subseteq \mathbb{R}^m, U \subseteq M)$.

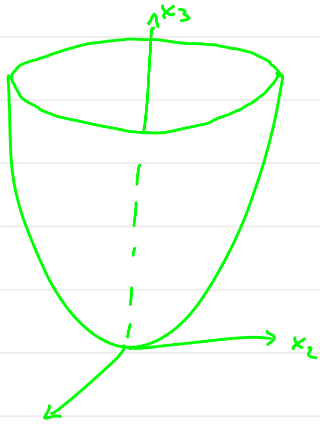
- $G: V \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $G(x) := \psi(x)'^T \psi(x)'$ heißt „<u>metrischer Tensor</u>"
- $g(x) := \det(G(x))$ heißt „<u>Gram'sche Determinante</u>"
- $f: U \to \mathbb{R}$ heißt über U integrierbar mit Integral $\int_U f(x)\, dS(x)$, wenn

$$\boxed{\int_V f(\psi(y)) \sqrt{g(y)}\, dy =: \int_U f(x)\, dS(x)}$$ existiert.

Bemerkungen:

- existiert eine globale Parametrisierung von M, läßt sich so schon das Integral über die UMF M definieren.
- $\int_U f(x)\, dS(x)$ ist unabh. von ψ (folgt aus Transformationssatz)
- für $m=n$, $dS(x) = dx$ ist die Def. konsistent mit dem Transformationssatz
- „dS" für "<u>surface element</u>"
- $\mathrm{vol}_m(\psi(V)) = \int_V \sqrt{\det(\psi'(y)^T \psi'(y))}\, dy = \int_{\psi(V)} dS(x)$.

Bsp.: Oberfläche des Paraboloidstumpfs



$$U := \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3 \wedge x_3 < 1 \}$$

$$\psi : V := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1 \} \to U$$

$$\psi : (x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\psi'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow G(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 + 4x_1^2 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & 1 + 4x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det G(x_1, x_2) = 1 + 4(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\text{Fläche von } U = \mathrm{vol}_2(U) = \int_U dS(x)$$

$$= \int_V \left[\det\left(\psi'(y)^T \psi'(y) \right) \right]^{1/2} dy$$

$$= \int_V \sqrt{1 + 4(x_1^2 + x_2^2)} \, d(x_1, x_2)$$

Polarkoordinaten

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr = \frac{2\pi}{8} \frac{2}{3} \left[(1 + 4r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^{1} = \frac{\pi}{6} \left(5^{3/2} - 1 \right) \quad \square$$