Anwendung 1:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$$

(Bemerke: es gibt keine elementare Stammfunktion für e^{-x^2}

$\mathrm{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-x^2}\,dx$ heißt „Gauß'sche Fehlerfkt.")

Beweis: Lösung durch Rückführung auf ein 2-dim. Integral.

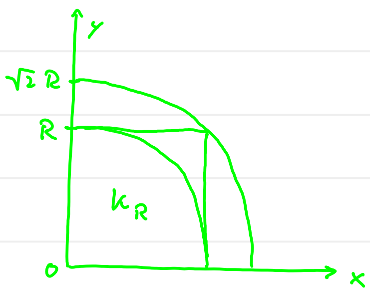
$$K_R := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq R^2\}$$

$$\cap$$

$$Q_R := [0,R]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\cap$$

$$K_{R\sqrt{2}}$$



Definiere $A_k := \{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \mid r\in[\frac{1}{k},R],\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]\}$. Dann ist

$$\int_{K_R\setminus K^\circ_{\frac{1}{k}}} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) = \int_{A_k} e^{-r^2}\cdot \underbrace{r}_{\text{Funktionaldet.}}\,d(r,\varphi)$$

$g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi\end{pmatrix}$, so dass $g(A_k) = K_R\setminus K^\circ_{\frac{1}{k}}$; g ist C^1-Diff. auf A_k

Fubini

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{1}{k}}^{R} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\varphi$$

Substitution $r^2 = t$, "$r\,dr = \frac{1}{2}dt$"

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{1}{k^2}}^{R^2} e^{-t}\,\tfrac{1}{2}\,dt\,d\varphi = \frac{\pi}{4}\left(e^{-\frac{1}{k^2}} - e^{-\frac{1}{R^2}}\right)$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-\frac{1}{R^2}}\right) = \int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y)$$

$$\int_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^R \int_0^R e^{-x^2} e^{-y^2}\, dx\, dy$$

$$= \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2$$

Wegen $K_R \subseteq Q_R \subseteq K_{\sqrt{2}R}$ gilt $\int_{K_R} \dots \le \int_{Q_R} \dots \le \int_{K_{\sqrt{2}R}} \dots$, also

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})} \le \int_0^R e^{-x^2} dx \le \sqrt{\frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})}$$

und schließlich $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ $\square$

Bemerkung: In der freien Wildbahn wird man gleich über $\mathbb{R}^2$ integrieren, mit dem Verständnis, dass dies ein Limes eigentlicher Integrale ist, bei dem alles gut geht ... wie im folgenden Bsp.:

Korollar: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit gilt:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-\langle x, Ax\rangle\right] dx = \left(\frac{\pi^n}{\det(A)}\right)^{1/2}}$$

<u>Berechnung:</u> $g(x) := A^{-\frac{1}{2}} x$ ist C^1-Diffeomorphismus auf $\mathbb{R}^n$

[mit $A = U \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} U^T$ ist $A^{-\frac{1}{2}} := U \operatorname{diag}(a_1^{-1/2}, \dots, a_n^{-1/2}) U^T$

(Argument für $R \to \infty$ fehlt ⇝ Übung!)

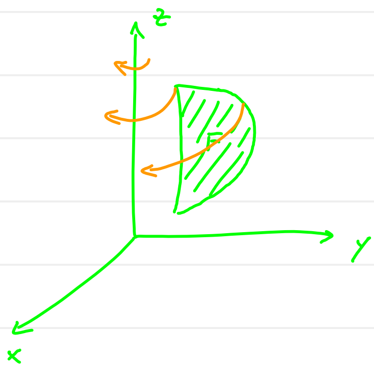
$$\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\exp[-\langle x, Ax\rangle]}_{f(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\exp[-\|x\|^2]}_{f\circ g(x)} \underbrace{(\det A)^{-1/2}}_{|\det J_g(x)|} dx$$

$$|\det J_g(x)| = \prod_{i=1}^n a_i^{-1/2} = (\det(A))^{-1/2}$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^n = \left(\frac{\pi^n}{\det(A)} \right)^{1/2}$$

□

<u>Anwendung ②:</u> (Volumen eines Rotationskörpers)



Sei: $F := \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in [z_0, z_1],\ y \in [a(z), b(z)] \}$

ein Normalbereich mit $z_1 \geq z_0$, $b(z) \geq a(z) \geq 0$.

Das Volumen des Rotationskörpers K, der durch Rotation um die z-Achse entsteht ist

$$\operatorname{vol}(K) = 2\pi y_0 |F|,$$

wobei $|F| := \int_F d(y,z)$ der Flächeninhalt und $y_0 := \frac{1}{|F|} \int_F y \, d(y,z)$ die y-Komponente des Schwerpunkts von F ist.

<u>Beweis:</u>

$$\int_K d(x,y,z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Transformation in} \\ \text{Zylinderkoordinaten}}}{=} \int_{F \times [0,2\pi]} r \, d(r,z,\varphi) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fubini}}}{=} \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_{z_0}^{z_1} \int_{a(z)}^{b(z)} r \, dr \, dz}_{|F| y_0} \, d\varphi$$

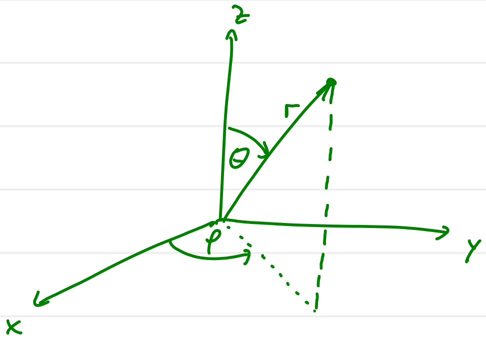
$$= 2\pi |F| y_0$$

□

Kugelkoordinaten / sphärische Koordinaten:

$$x = r\cos\varphi \sin\theta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = r\cos\theta$$

$$\theta \in [0,\pi]$$
$$r \geq 0$$
$$\varphi \in [0,2\pi]$$



$$g: (r,\varphi,\theta) \mapsto (x,y,z)$$

$$J_g(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\det J_g(r,\varphi,\theta)\right| = r^2\sin\theta \geq 0$$