Def.: Sei $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

- wenn $f \geq 0$ ist, und eine ausschöpfende Folge A_k für A existiert, so dass $\forall k$ $f|_{A_k}$ beschränkt und R.-integrierbar ist, dann heißt
$$\lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f(x)\,dx =: \int_A f(x)\,dx \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \qquad (*)$$
das „uneigentliche R.-Integral" von f auf A.

- wenn $f = f_+ - f_-$ mit $f_+, f_- \geq 0$, dann ist das uneig. R.-I. definiert als
$$\int_A f(x)\,dx = \int_A f_+(x)\,dx - \int_A f_-(x)\,dx \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$
sofern beide Integrale existieren und nicht beide ∞ sind.

- ist $\int_A f(x)\,dx$ endlich, sagt man f ist auf A „absolut Riemann-integrierbar".

Bemerkung: man kann zeigen, dass $(*)$ unabh. von der ausschöpfenden Folge ist.

Bsp.:
- $A = [0,\infty)^2$, $f(x) = e^{-x_1-x_2}$, $A_k = [0,k]^2$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,k]^2} e^{-x_1-x_2}\,dx \overset{\text{Fubini}}{=} \lim_{k\to\infty} \left[-e^{-x_1}\right]_0^k \left[-e^{-x_2}\right]_0^k$$
$$= \lim_{k\to\infty} (1-e^{-k})^2 = \underline{\underline{1}}$$

- $A = (0,1)^2$, $f(x) = \frac{x_1}{x_2}$, $A_k = (0,1) \times (\frac{1}{k}, 1)$

$$\int_{(0,1)^2} \frac{x_1}{x_2}\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{(0,1)\times(\frac{1}{k},1)} \frac{x_1}{x_2}\,dx \overset{\text{Fubini}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{(0,1)} \left(\int_{(\frac{1}{k},1)} \frac{1}{x_2}\,dx_2 \right) x_1\,dx_1$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{(0,1)} (\log k)\, x_1\,dx_1 = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \log k = \underline{\underline{\infty}}$$

$\to$ f ist auf A nicht absolut Riemann-integrierbar.

Volumenfunktion & Transformationssatz

$\mathcal{J}_n := \{ A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A$ beschränkt und ∂A vom Lebesgue-Maß Null $\}$

($A \in \mathcal{J}_n$ ist „Jordan-meßbare Menge")

Satz: Die Abbildung $\mathrm{vol}: \mathcal{J}_n \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \int_A dx$ besitzt folgende Eigenschaften: $\forall A, B \in \mathcal{J}_n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

(i) Nichtnegativität $\quad \mathrm{vol}(A) \geq 0$

(ii) Monotonie $\quad \mathrm{vol}(A) \geq \mathrm{vol}(B) \Leftarrow A \supseteq B$

(iii) Additivität $\quad \mathrm{vol}(A \cup B) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B) \Leftarrow A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$

(iv) Translationsinvarianz $\quad \mathrm{vol}(A+x) = \mathrm{vol}(A)$

(v) Normierung $\quad \mathrm{vol}(Q) = 1$ für $Q = [0,1]^n$

(vi) Rotationsinvarianz $\quad U \in O(n): \ \mathrm{vol}(UA) = \mathrm{vol}(A)$

$O(n) := \{ U \in M_n(\mathbb{R}) \mid U^T U = \mathbb{1} \}$

(vii) Skalierung: Ist $\{e_i\}_{i=1}^n$ ONB & $\Lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear mit $\Lambda: e_i \mapsto s_i e_i$ wobei $s_i \geq 0$, dann gilt $\mathrm{vol}(\Lambda A) = \mathrm{vol}(A) \prod_{i=1}^n s_i$

Bemerkung: (i)-(v) legen die Volumenfunktion auf $\mathcal{J}_n$ eindeutig fest

Wir importieren ein nützliches Werkzeug aus der linearen Algebra:

Satz: (Singulärwertzerlegung) Für jede Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gibt es orthogonale Transformationen $U \in O(n)$, $V \in O(m)$ und $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times m}$, so dass

$$M = U \Lambda V, \quad \Lambda_{kl} = \begin{cases} s_k \geq 0, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}.$$

Bemerkungen
- Für positiv semi-definites M ist dies die Eigenwertzerlegung.
- Die Menge der „Singulärwerte" $\{s_k\}$ ist eindeutig für jedes M.
- $\mathrm{spec}\{M^T M\} = \{s_k^2\}$

Korollar: Sei $M: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und $A \in \mathfrak{J}_n$. Dann gilt:

$$\boxed{\mathrm{vol}(MA) = |\det(M)|\, \mathrm{vol}(A)}$$

Beweis: Singulärwertzerlegung $M = U\Lambda V$ mit $U, V \in O(n)$, $\Lambda_{kl} = \delta_{kl} s_k$, $s_k \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(MA) &= \mathrm{vol}(U\Lambda V A) \\
&\overset{(vi)}{=} \mathrm{vol}(\Lambda V A) \\
&\overset{(vii)}{=} \mathrm{vol}(VA) \prod_{i=1}^{n} s_i \\
&\overset{(vi)}{=} \mathrm{vol}(A)\, |\det M|
\end{aligned}$$

da $|\det(M)| = |\det(U)\det(\Lambda)\det(V)| = |\det(\Lambda)| = \prod_{i=1}^{n} s_i$ $\square$

$U \in O(n) \Rightarrow \det(U) = \pm 1$

da aus $U^T U = \mathbb{1}$ folgt, dass

$$\begin{aligned}
\det(U^T)\det(U) &= 1 \\
&= \det(U)^2
\end{aligned}$$

wegen $\det(U) \in \mathbb{R}$ ist dann $\det(U) \in \{\pm 1\}$

Bemerkung: Der Einheitsquader $[0,1]^n$ wird von M auf ein „Parallelotop" mit Volumen $\mathrm{vol}(M[0,1]^n) = |\det M|$ abgebildet.

Erinnerung: • $g \in C^1(U,V)$, $U,V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt „C^1-Diffeomorphismus" falls g bijektiv und $g^{-1}: V \to U$ diff.bar ist.

• Dann gilt automatisch $g^{-1} \in C^1(V,U)$

Lemma: (Charakterisierung von C^1-Diffeomorphismen)

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ injektiv. Dann ist $g: U \to g(U)$ genau dann ein C^1-Diffeomorphismus, wenn $\det(J_g(x)) \neq 0 \quad \forall x \in U$.

Beweis: '$\Rightarrow$' mit $y = g(x)$ und $g^{-1} \circ g(x) = x$ folgt aus der Kettenregel

$g^{-1\prime}(y)\, g'(x) = id$ also $J_{g^{-1}}(y)\, J_g(x) = \mathbb{1}$

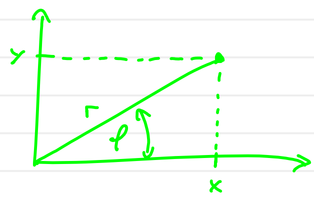
und damit $\det(J_{g^{-1}}(y)) \cdot \det(J_g(x)) = 1$

'$\Leftarrow$' wegen Bijektivität existiert eine globale Umkehrfunktion, so dass die Aussage aus dem Satz über lokale Umkehrbarkeit folgt.

$\square$

Bsp.: ① Polarkoordinaten

$U := \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0,\ \varphi \in (0, 2\pi)\}$



$g(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$J_g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$

$\to \det(J_g(r,\varphi)) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$

$g: U \to g(U)$ ist bijektiv mit $g(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y = 0\}$

und damit C^1-Diffeomorphismus.

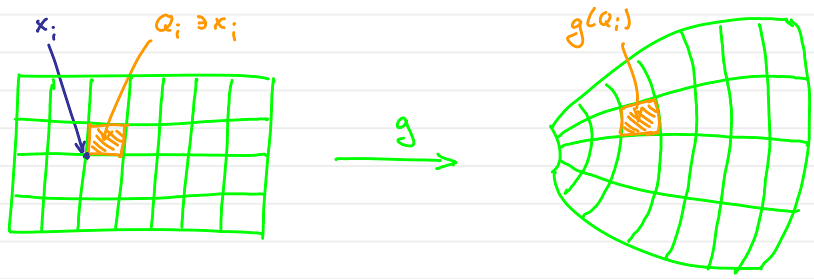
Satz: (**Transformationssatz**) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g: U \to g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus, $A \subseteq U$ kompakt mit ∂A vom Lebesgue-Maß Null. Dann gilt für jede Riemann-integrierbare Fkt. $f: g(A) \to \mathbb{R}$:

$$\int_{g(A)} f(x)\,dx = \int_A f(g(u))\,|\det J_g(u)|\,du,$$

wobei $(J_g(u))_{kl} := \partial_l g_k(u)$ Jacobi-Matrix an der Stelle u ist.

Bemerkungen:
- $g(A)$ ist wieder kompakt & $\partial g(A) = g(\partial A)$ vom L.-M. Null.
- Es genügt, wenn $g \in C^1$ fast überall Diffeomorphismus ist.
- $\det(J_g(x))$ heißt „**Funktionaldeterminante**"

Beweisidee: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader mit Zerlegung $A = \bigcup_{i=1}^m Q_i$, $Q_i = x_i + Q_0$, $x_i \in Q_i$



Für immer feiner werdende Zerlegungen gilt wegen Integrierbarkeit von f:

$$\left| \int_{g(A)} f(y)\,dy - \sum_{i=1}^m f(g(x_i))\,\mathrm{vol}(g(Q_i)) \right| \to 0$$

Wegen Differenzierbarkeit von g gilt zudem:

$$g(x) = g(x_i) + g'(x_i)(x - x_i) + o(\|x - x_i\|) \quad \text{und damit}$$

$$g(Q_i) = g(x_i + Q_0) \approx g(x_i) + g'(x_i)\,Q_0 \,, \quad \text{also}$$

$$\mathrm{vol}(g(Q_i)) \approx \mathrm{vol}\big(g(x_i) + g'(x_i)\,Q_0\big) \overset{\text{Translationsinvarianz}}{=} \mathrm{vol}\big(g'(x_i)\,Q_0\big)$$

$$\overset{\text{Volumen eines Parallelotops}}{=} |\det J_g(x_i)|\,\mathrm{vol}(Q_i)$$

$$\longrightarrow \int_{g(A)} f(y)\,dy \approx \sum_{i=1}^{m} f(g(x_i))\,|\det J_g(x_i)|\,\mathrm{vol}(Q_i) \approx \int_A f(g(x))\,|\det J_g(x)|\,dx$$

$\square$