Lineare Operatoren auf Hilberträumen

Def.: • Sei $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein Unterraum eines Hilbertraums $\mathcal{H}$. Ein „linearer Operator" (kurz: Operator) A ist eine lineare Abbildung $A: D(A) \to \mathcal{H}$.

• $D(A)$ heißt „Definitionsbereich" von A.

Erinnerung: Linearität bedeutet $A(\lambda\varphi + \psi) = \lambda A\varphi + A\psi \quad \forall \varphi, \psi \in D(A)\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

• Ein Operator A heißt „beschränkt", wenn $\|A\| := \sup\limits_{\substack{\psi \in D(A) \\ \|\psi\| = 1}} \|A\psi\| < \infty$

• $\|A\|$ heißt dann „Operatornorm"

• $\mathcal{B}(\mathcal{H}) :=$ Raum der beschränkten lin. Op.en auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$.
(dies ist wieder ein Banachraum)

Bsp.: • Für $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$ können (in gegebener Basis) lineare Operatoren mit $d \times d$ Matrizen identifiziert werden. Mit $D(A) = \mathcal{H}$ gilt $\|A\| =$ größter Singulärwert

• Translationsoperator A_ξ, $\xi \in \mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$, $D(A) = \mathcal{H}$

$$(A_\xi \psi)(x) := \psi(x - \xi)$$

$$\|A_\xi\| = \sup_{\|\psi\|=1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x-\xi)|^2 \, dx \right)^{1/2} = \sup_{\|\psi\|=1} \|\psi\| = 1$$

• Multiplikationsoperator $\hat{V}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ $\quad (\hat{V}\psi)(x) := V(x)\psi(x)$
mit $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$D(\hat{V}) = \{ \psi \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid x \mapsto V(x)\psi(x) \text{ ist in } L^2(\mathbb{R}^n) \}$$

$\hat{V}$ ist genau dann beschränkt, wenn $\|V\|_\infty < \infty$.

• Impulsoperator $P: D(P) = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

$$(P\psi)(x) := -i \frac{d}{dx} \psi(x)$$

P ist unbeschränkt

• Fouriertransformation $\mathcal{F}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $D(\mathcal{F}) = \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$
ist beschränkt, da $\|\mathcal{F}\| = \sup\limits_{\|\psi\|=1} \|\mathcal{F}\psi\| \underset{\text{Plancherel}}{=} \sup\limits_{\|\psi\|=1} \|\psi\| = 1$

Satz: Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A: D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator, dann sind äquivalent:

(i) A ist beschränkt

(ii) A ist stetig

(iii) A ist stetig bei Null, d.h. $\forall\, (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|A\psi_n\| = 0$$

Beweis: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) aus 2. Semester

(ii) $\Rightarrow$ (iii) trivial

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Ist $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ so, dass $\|\phi_n - \phi\| \to 0$ mit $\phi \in D(A)$, dann gilt für $\psi_n := (\phi_n - \phi)$ (iii) & damit

$$\lim_{n\to\infty} \|A\psi_n - A\psi\| = 0 \qquad \square$$

Satz: Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A: D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator der (i) beschränkt ist & (ii) so dass $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$, dann gibt es eine eindeutige beschränkte Fortsetzung $\hat{A}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $\|\hat{A}\| = \|A\|$.

(Fortsetzung bedeutet $\hat{A}\psi = A\psi \;\; \forall \psi \in D(A)$)

Beweisidee: Definiere $\hat{A}\psi := \lim_{n\to\infty} A\psi_n$ für $\psi_n \to \psi$ mit $\psi_n \in D(A)$, $\psi \in \overline{D(A)}$. $\square$

Beschränkte lineare Operatoren auf Hilberträumen

Sind $A, B: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beschränkte lineare Operatoren, dann auch AB, BA und $\lambda A + B$.

I.A. gilt jedoch $AB \neq BA$, d.h. $[A,B] := AB - BA \neq 0$

„Kommutator"

Def.: B heißt „invers" zu A, genau dann wenn $BA = AB = \mathbb{1}$, wobei $\mathbb{1}\psi = \psi \; \forall \psi \in \mathcal{H}$ der Einsoperator ist. Wir schreiben dann $A^{-1} = B$.

Bemerkung:
- ist $\dim(\mathcal{H}) < \infty$, dann gilt $AB = \mathbb{1} \Leftrightarrow BA = \mathbb{1}$
  für $\dim(\mathcal{H}) = \infty$ gilt dies nicht mehr
  (Bsp.: ist $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ONB und $A\psi_n := \psi_{n+1}$, $B\psi_n := \begin{cases} \psi_{n-1}, & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$,
  dann gilt $BA = \mathbb{1}$, aber $AB \neq \mathbb{1}$)
- existieren die Inversen, dann gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Def.: Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
Der „Adjungierte Operator" $A^+ : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ zu A ist definiert durch

$$\langle A^+\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$$

Kommentar:
- A^+ ist in diesem Fall eindeutig definiert & es gilt $\|A^+\| = \|A\|$.
- Es gelten die Rechenregeln:
  - $(A + \lambda B)^+ = A^+ + \bar{\lambda} B^+$ für $\lambda \in \mathbb{C}$
  - $(AB)^+ = B^+ A^+$

Lemma: (Matrixelemente)
Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $(\varphi_n)_{n \in I}$ mit $I \subseteq \mathbb{N}$ eine ONB des Hilbertraums $\mathcal{H}$.

Dann ist $\forall \psi \in \mathcal{H}$:

$$A\psi = \sum_{n,m \in I} \varphi_n \langle \varphi_n, A\varphi_m \rangle \langle \varphi_m, \psi \rangle$$

Beweis: Da (φ_n) ONB ist, gilt:

(i) $\psi = \sum_{n \in I} \varphi_n \langle \varphi_n, \psi \rangle$

(ii) $A\varphi_n = \sum_{m \in I} \varphi_m \langle \varphi_m, A\varphi_n \rangle$

Da A stetig & linear ist, dürfen wir den Limes (im Fall $I = \mathbb{N}$) in (i) mit A vertauschen, so dass die Behauptung aus (i) & (ii) folgt. $\square$

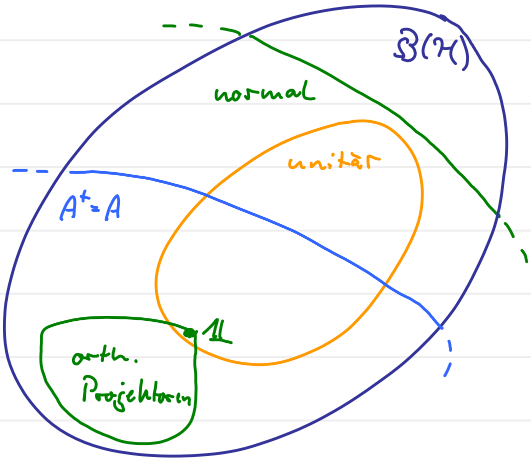
Bemerkung:
- $A \in B(\mathcal{H})$ ist durch die Matrixelemente $\langle f_n, A f_m \rangle$ eindeutig bestimmt.
- es gilt $\langle f_n, A^+ f_m \rangle = \langle A f_n, f_m \rangle = \overline{\langle f_m, A f_n \rangle}$

Def.: Ein beschränkter Operator $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt ...
- „normal" wenn $[A^+, A] = 0$,
- „selbstadjungiert", wenn $A^+ = A$,
- „unitär", falls $A^+ = A^{-1}$,
- „orthogonaler Projektor", falls $A^+ = A$ und $A^2 = A$.

Lemma: Ist $U: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unitär, dann gilt

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}: \langle \varphi, \psi \rangle = \langle U\varphi, U\psi \rangle$$

also auch $\|\varphi\| = \|U\varphi\|$ & damit $\|U\| = 1$.



Beweis: $\langle U\varphi, U\psi \rangle = \langle U^+ U \varphi, \psi \rangle \underset{U^+ = U^{-1}}{=} \langle \varphi, \psi \rangle$ $\square$

Bsp. für unitäre Operatoren.
- Translationsoperator $A_\xi: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ $A_\xi \psi(x) := \psi(x - \xi)$
- Fouriertransformation $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.
- Multiplikationsoperatoren der Form e^{iV} mit $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Quantenmechanische Zeitentwicklung $U_t: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$

Bemerkungen:
- sind U, V unitär, dann auch UV & U^{-1} (aber i.A. nicht $U+V$)

Lemma: Ist $A \in B(\mathcal{H})$ selbstadjungiert, dann gilt $\forall \psi \in \mathcal{H}: \langle \psi, A\psi \rangle \in \mathbb{R}$.

Beweis: $\overline{\langle \psi, A\psi \rangle} = \overline{\langle A^+\psi, \psi \rangle} = \langle \psi, A^+\psi \rangle \underset{A = A^+}{=} \langle \psi, A\psi \rangle$ $\square$