HILBERTRÄUME

Motivation: Mathematischer Rahmen für die Quantenphysik

Def.:
- ein „Skalarprodukt" auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{H}$ (mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ für die gilt: $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$:

  (i) $\langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$ und $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$

  (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $\langle \psi, \varphi_1 + \lambda \varphi_2 \rangle = \langle \psi, \varphi_1 \rangle + \lambda \langle \psi, \varphi_2 \rangle$

  (iii) $\langle \varphi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \varphi \rangle}$

- $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt „Prähilbertraum"

Bemerkungen:
- Für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ ist $\varphi \mapsto \langle \psi, \varphi \rangle$ ein „lineares Funktional" auf $\mathcal{H}$ (d.h. eine lineare Abb. mit Werten in $\mathbb{K}$)
- Aus (ii) & (iii) folgt $\langle \lambda \psi, \varphi \rangle = \bar{\lambda} \langle \psi, \varphi \rangle$

Satz: (Cauchy-Schwarz) Ist $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, dann gilt $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$:

$$\boxed{|\langle \varphi, \psi \rangle|^2 \leq \langle \varphi, \varphi \rangle \langle \psi, \psi \rangle}$$

Beweis: O.B.d.A. $\langle \varphi, \psi \rangle \geq 0$ da wir ψ durch $\lambda \psi$ ersetzen können, so dass $\langle \varphi, \lambda \psi \rangle \geq 0$ und $|\lambda| = 1$.

Dann gilt $\forall \mu \in \mathbb{R}$:

$$\langle \varphi - \mu \psi, \varphi - \mu \psi \rangle \underset{\mu, \langle \varphi, \psi \rangle \in \mathbb{R}}{=} \langle \varphi, \varphi \rangle + \mu^2 \langle \psi, \psi \rangle - 2\mu \langle \psi, \varphi \rangle \geq 0$$

Daraus folgt für
$$\begin{cases} \langle \psi, \psi \rangle = 0 : & \langle \psi, \varphi \rangle = 0 \\ \langle \psi, \psi \rangle > 0 : & \langle \varphi, \varphi \rangle - \dfrac{|\langle \psi, \varphi \rangle|^2}{\langle \psi, \psi \rangle} \geq 0 \end{cases}$$

für $\mu = \dfrac{\langle \psi, \varphi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle}$

$\square$

Satz: (Δ-Ungl.) Ist $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, dann gilt mit $\|\psi\| := \langle\psi,\psi\rangle^{1/2}$ für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$:

$$\boxed{\|\psi + \varphi\| \leq \|\psi\| + \|\varphi\|}$$

Beweis: $\|\psi + \varphi\|^2 = \langle\psi+\varphi, \psi+\varphi\rangle = \|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2 + \underbrace{\langle\psi,\varphi\rangle + \langle\varphi,\psi\rangle}_{\leq 2\|\varphi\|\cdot\|\psi\| \text{ nach C.-S.}}$

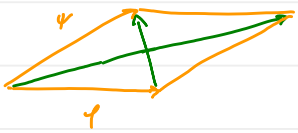
$\leq (\|\psi\| + \|\varphi\|)^2$ $\square$

Bemerkung: damit ist $\|\cdot\|$ tatsächlich eine Norm, und $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{R}$: $(\varphi,\psi) \mapsto \|\varphi - \psi\|$ ein metrischer Raum.

Satz: (Parallelogrammgleichung) Ist $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, dann gilt $\forall \varphi,\psi \in \mathcal{H}$:

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2\|\varphi\|^2 + 2\|\psi\|^2$$

(Summe der Diagonalen^2 = Summe aller Seiten^2)



Beweis: Übung

(Bemerkung: Eine Norm erfüllt diese Gl. g.d.w. sie von einem Skalarprodukt induziert wird.
Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt dann die „Polarisationsformel" $4\langle\varphi,\psi\rangle = \|\varphi+\psi\|^2 - \|\varphi-\psi\|^2 + i\|\varphi+i\psi\|^2 - i\|\varphi-i\psi\|^2$)

Satz: Ist $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum und $\varphi \in \mathcal{H}$, dann sind folgende Abbildungen auf $\mathcal{H}$ gleichmäßig stetig:

(i) $\psi \mapsto \langle\varphi,\psi\rangle$

(ii) $\psi \mapsto \langle\psi,\varphi\rangle$

(iii) $\psi \mapsto \|\psi\|$

Beweis: (i)&(ii): $|\langle\psi_1,\varphi\rangle - \langle\psi_2,\varphi\rangle| = |\langle\psi_1-\psi_2,\varphi\rangle| \overset{\text{C.-S.}}{\leq} \|\psi_1-\psi_2\|\,\|\varphi\|$

d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \|\psi_1 - \psi_2\| < \delta \Rightarrow |\langle\psi_1,\varphi\rangle - \langle\psi_2,\varphi\rangle| < \varepsilon$

(iii) $\|\psi_1\| - \|\psi_2\| \underset{\uparrow}{\leq} \|\psi_1 - \psi_2\|$

Δ-Ungl. $\|\psi_1 + \psi_2 - \psi_2\| \leq \|\psi_2\| + \|\psi_1 - \psi_2\|$

Damit gilt auch

$$\big|\|\psi_1\| - \|\psi_2\|\big| \leq \|\psi_1 - \psi_2\| \quad \forall \psi_1,\psi_2 \in \mathcal{H}$$

Def.: Ein „<u>Hilbertraum</u>" $\mathcal{H}$ ist ein Prähilbertraum der (als metrischer Raum) vollständig ist (d.h. alle Cauchyfolgen konvergieren). Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) heißt $\mathcal{H}$ „<u>komplex</u>" (bzw. „<u>reell</u>").

<u>Beispiele</u> von Hilberträumen:

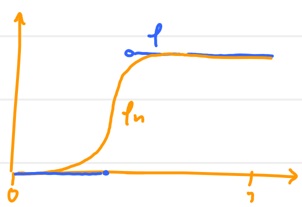
- $L^2(\Omega)$ mit $\langle \psi, \varphi \rangle := \int_\Omega \bar{\psi}(x)\, \varphi(x)\, \mu(dx)$
- $\ell^2(\mathbb{N}) := \{ \psi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |\psi_n|^2 < \infty \}$ mit $\langle \psi, \varphi \rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} \bar{\psi}_n \varphi_n$ allgemeiner
- $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$ mit $\langle \psi, \varphi \rangle := \sum_{i=1}^{d} \bar{\psi}_i \varphi_i$

Prähilbertraum der kein Hilbertraum ist:

- $C([0,1])$ (= Raum der stetigen Fkt.en auf $[0,1]$)

  mit $\langle \psi, \varphi \rangle := \int_0^1 \bar{\psi}(x)\, \varphi(x)\, dx$

  (z.B. existiert $(\varphi_n \in C([0,1]))_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$ für $\varphi \in L^2([0,1]) \setminus C([0,1])$)



<u>Notation:</u>

- $\psi \perp \varphi \iff \langle \psi, \varphi \rangle = 0$ Orthogonalität
- $M^\perp := \{ \psi \in \mathcal{H} \mid \forall \varphi \in M : \langle \varphi, \psi \rangle = 0 \}$ Orthogonalkomplement

<u>Satz:</u> Ist $M \subseteq \mathcal{H}$ ein Unterraum eines Hilbertraums $\mathcal{H}$, dann ist das Orthogonalkomplement $M^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$.

(-"- meint hier stets „Untervektorraum")

Beweis: Wegen $(\psi \in M^\perp \Rightarrow \lambda\psi \in M^\perp)$ & $(\psi, \varphi \in M^\perp \Rightarrow \psi + \varphi \in M^\perp)$ ist $M^\perp$ Unterraum.

Für $\psi \in M$ gilt mit $f(\varphi) := \langle \psi, \varphi \rangle$ dass $\psi^\perp = \{ \varphi \in \mathcal{H} \mid f(\varphi) = 0 \} = f^{-1}(\{0\})$.

Da f stetig & $\{0\}$ abgeschlossen, ist auch das Urbild $\psi^\perp$ abgeschlossen.

Damit ist auch $M^\perp = \bigcap_{\psi \in M} \psi^\perp$ abgeschlossen. $\square$

Satz: Ist $M \subseteq \mathcal{H}$ eine nichtleere, konvexe, abgeschlossene Teilmenge in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann gibt es ein eindeutiges Element $\psi_0 \in M$, so dass $\forall \psi \in M$: $\|\psi_0\| \leq \|\psi\|$.

Beweis: Parallelogramml. für $\frac{1}{2}\psi$ & $\frac{1}{2}\varphi$:

$$\frac{1}{4}\|\psi - \varphi\|^2 = \frac{1}{2}\|\psi\|^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 - \left\|\frac{\psi+\varphi}{2}\right\|^2$$

Wegen Konvexität ist mit $\varphi, \psi \in M$ auch $\frac{\psi+\varphi}{2} \in M$ und mit $\delta := \inf_{\psi \in M} \|\psi\|$ gilt dann

$$\|\psi - \varphi\|^2 \leq 2\|\psi\|^2 + 2\|\varphi\|^2 - 4\delta^2.$$

Angenommen $\|\psi\| = \|\varphi\| = \delta$, so folgt daraus $\|\psi - \varphi\| = 0$ und damit $\psi = \varphi$.
Existenz von $\psi_0 \in M$ mit $\|\psi_0\| = \delta$ folgt aus Abgeschlossenheit von M & Vollständigkeit von $\mathcal{H}$. $\square$

Korollar: Ist $h \subseteq \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums $\mathcal{H}$, dann kann jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ eindeutig in $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ mit $\varphi_1 \in h$, $\varphi_2 \in h^\perp$ zerlegt werden.
D.h. es gilt $\boxed{\mathcal{H} = h \oplus h^\perp}$ und damit auch $h^{\perp\perp} = h$.

Beweis: Sei $M := \varphi - h$ und $\varphi - \varphi_1$ Element minimaler Norm $\|\varphi - \varphi_1\| =: \delta$ in M.
Wir wollen zeigen, dass $\varphi_2 := \varphi - \varphi_1 \in h^\perp$. Für bel. $\psi \in h \setminus \{0\}$ betrachte
$\tilde{\varphi} := \varphi_1 + \frac{\langle \psi, \varphi_2 \rangle}{\|\psi\|^2}\psi \in h$. Es gilt $\delta^2 \leq \|\varphi - \tilde{\varphi}\|^2 = \delta^2 - \frac{|\langle \psi, \varphi_2 \rangle|^2}{\|\psi\|^2}$

also $\langle \psi, \varphi_2 \rangle = 0 \;\forall \psi \in h$ & damit $\varphi_2 \in h^\perp$.

Zur Eindeutigkeit: ist $\varphi = \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2$ noch eine Zerlegung mit $\tilde{\varphi}_1 \in h$ & $\tilde{\varphi}_2 \in h^\perp$, dann muß $\varphi_1 - \tilde{\varphi}_1 = \varphi_2 - \tilde{\varphi}_2 \in h \cap h^\perp = \{0\}$. $\square$

Satz: Ist $\Psi: \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ eine stetige, lineare Abbildung („Funktional") auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann gibt es ein eindeutiges Element $\psi \in \mathcal{H}$, so dass

$$\forall \varphi \in \mathcal{H}: \boxed{\Psi(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle}$$

Beweis: Für $\Psi = 0$ wähle $\psi = 0$. Wenn $\Psi \neq 0$ ist, definiere $M := \Psi^{-1}(\{0\})$

Linearität von $\Psi \Rightarrow M$ ist Unterraum

Stetigkeit von $\Psi \Rightarrow M$ ist abgeschlossen

$\Psi \neq 0 \Rightarrow M \neq \mathcal{H} \Rightarrow \exists \xi \in M^\perp : \|\xi\| = 1$

Betrachte $\tilde{\xi} := \Psi(\varphi)\xi - \Psi(\xi)\varphi$. Da $\Psi(\tilde{\xi}) = 0$, ist $\tilde{\xi} \in M$ & $\langle \xi, \tilde{\xi} \rangle = 0$.

Also $0 = \langle \xi, \tilde{\xi} \rangle = \Psi(\varphi)\langle \xi, \xi \rangle - \Psi(\xi)\langle \xi, \varphi \rangle$ & damit

$$\Psi(\varphi) = \Psi(\xi)\langle \xi, \varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle \quad \text{mit} \quad \psi := \overline{\Psi(\xi)}\,\xi .$$

Um Eindeutigkeit zu beweisen, nehmen wir an $\Psi(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle = \langle \tilde{\psi}, \varphi \rangle$.

Dann ist $\langle \psi - \tilde{\psi}, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}$, also auch für $\varphi = \psi - \tilde{\psi}$, so dass

$\|\psi - \tilde{\psi}\| = 0$ und daher $\psi = \tilde{\psi}$. □

Def.:

- Eine Familie $\{\psi_\alpha \in \mathcal{H}\}_{\alpha \in A}$ mit (nicht notwendigerweise abzählbarer) Indexmenge A heißt „orthonormal", wenn $\forall \alpha, \beta \in A : \langle \psi_\alpha, \psi_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$.

- Eine „orthonormale Basis" (ONB) von $\mathcal{H}$ ist eine Familie von orthonormalen $\{\psi_\alpha \in \mathcal{H}\}_{\alpha \in A}$, für die gilt: $\forall \alpha \in A : \langle \psi_\alpha, \varphi \rangle = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

(Mit Hilfe des Auswahlaxioms zeigt man, dass jeder H.raum eine ONB besitzt.)

- Die „Dimension" eines Hilbertraums ist gegeben durch die Kardinalität einer (& damit jeder) seiner ONBs.

($\mathcal{H}_1$ & $\mathcal{H}_2$ sind isomorph g.d.w. $\dim(\mathcal{H}_1) = \dim(\mathcal{H}_2)$)

- Ein Hilbertraum heißt „separabel" wenn eine abzählbare ONB existiert.

Im Folgenden betrachten wird ausschließlich separable Hilberträume.

Bsp.:
- $\mathbb{C}^d$ und $\ell^2(\mathbb{N})$ sind offensichtlich separable Hilberträume: Als ONB können wir jeweils wählen $\varphi_1 = (1,0,0,\ldots)$, $\varphi_2 = (0,1,0,0,\ldots), \ldots$
- $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist ebenfalls separabel. Zur Konstruktion einer ONB starten wir mit „Gauß'schen Wellenpaketen" $G_k(x) := e^{-\|x\|^2 + ik\cdot x}$, $k \in \mathbb{Q}^n$

  Mittels Gram-Schmidt läßt sich daraus ein orthonormale Folge $(\tilde{G}_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n))_{\alpha\in\mathbb{N}}$ konstruieren.

  Sei nun $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\langle \tilde{G}_n, f\rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, dann gilt auch

  $0 = \langle G_k, f\rangle = \mathcal{F}(gf)(k) \quad \forall k \in \mathbb{Q}^n$ mit $g(x) := (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\|x\|^2}$

  Da $k \mapsto \mathcal{F}(gf)(k)$ stetig ist, gilt dann: $\quad \forall k \in \mathbb{R}^n : \mathcal{F}(gf)(k) = 0$

  und wegen Injektivität von $\mathcal{F}$: $\quad gf = 0 \quad$ also $f = 0$.

  Damit ist $\{\tilde{G}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ ONB & $L^2(\mathbb{R}^n)$ separabel.

  (da demnach $\dim(L^2(\mathbb{R}^n)) = \dim(\ell^2(\mathbb{N}))$ sind diese beiden H.-räume isomorph)

Satz: (ONB Charakterisierung)

Seien $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq \mathcal{H}$ orthonormal mit $A \subseteq \mathbb{N}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\quad (\forall \alpha \in A: \langle \varphi_\alpha, f\rangle = 0) \Rightarrow f = 0 \qquad$ ONB

(ii) $\quad \forall f \in \mathcal{H}: \quad f = \sum_{\alpha\in A} \langle \varphi_\alpha, f\rangle \varphi_\alpha \qquad$ Entwicklung in der ONB / „Fourierentw."

(iii) $\quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{H}: \quad \langle f_1, f_2\rangle = \sum_{\alpha\in A} \langle f_1, \varphi_\alpha\rangle\langle \varphi_\alpha, f_2\rangle \qquad$ „Parseval'sche Gl."

(iv) $\quad \forall f \in \mathcal{H}: \quad \|f\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\langle f, \varphi_\alpha\rangle|^2 \qquad$ „Bessel'sche Gl."

Beweisskizze: (i) ⇒ (ii): $\tilde{f} := \sum_{\alpha \in A} \langle \psi_\alpha, f \rangle \psi_\alpha$ (Übung: $\tilde{f} \in \mathcal{H}$)

$$\langle \psi_\alpha, f - \tilde{f} \rangle = \langle \psi_\alpha, f \rangle - \sum_{\beta \in A} \langle \psi_\beta, f \rangle \underbrace{\langle \psi_\alpha, \psi_\beta \rangle}_{\delta_{\alpha\beta}} = 0 \quad \forall \alpha$$

aus (i) folgt damit $f - \tilde{f} = 0$.

(ii) ⇒ (iii):
$$\langle f_1, f_2 \rangle \overset{(ii)}{=} \left\langle \sum_\alpha \psi_\alpha \langle \psi_\alpha, f_1 \rangle , \sum_\beta \psi_\beta \langle \psi_\beta, f_2 \rangle \right\rangle$$

Stetigkeit & Linearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \underbrace{\langle \psi_\alpha, \psi_\beta \rangle}_{\delta_{\alpha,\beta}} \langle f_1, \psi_\alpha \rangle \langle \psi_\beta, f_2 \rangle$$

$$= \sum_\alpha \langle f_1, \psi_\alpha \rangle \langle \psi_\alpha, f_2 \rangle .$$

(iii) ⇒ (iv): folgt mit $f_1 = f_2 = f$.

(iv) ⇒ (i): ist $f \in \mathcal{H}$ so dass $\langle \psi_\alpha, f \rangle = 0 \ \forall \alpha \in A$, dann gilt

$$\|f\|^2 \overset{(iv)}{=} \sum_\alpha |\langle \psi_\alpha, f \rangle|^2 = 0 \text{ und damit } f = 0. \qquad \square$$

Bemerkung: Vergleich zw. Parsevalscher Gl. & Plancherel Identität (beide für $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$)

Plancherel: $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathcal{F} f_1(k)} \, \mathcal{F} f_2(k) \, dk$

mit $\mathcal{F} f(k) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} f(x) \, dx$

Parseval: $\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \overline{\langle \psi_\alpha, f_1 \rangle} \langle \psi_\alpha, f_2 \rangle$

mit $\langle \psi_\alpha, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_\alpha(x)} f(x) \, dx$

D.h. „ebene Wellen" $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-ik\cdot x}$ spielen für Plancherel die Rolle der ONB.

Allerdings ist $e^{-ik\cdot x} \notin L^2(\mathbb{R}^n)$!