Lemma: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so dass für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\|f\|_p \leq c_1 \|f\|_\infty + c_2 \sup_x \|x\|^{2n} |f(x)| \qquad \forall p \in [1,\infty]$$

D.h. insbesondere, dass $\boxed{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n)}$ $\forall p \in [1,\infty]$

Beweis: Wir verwenden wiederholt, dass $\|gf\|_p \leq \|g\|_\infty \|f\|_p$.

$$\|f\|_p = \| f \cdot \chi + (1-\chi) f \|_p \qquad \text{mit } \chi(x) := \begin{cases} 1, & \|x\| \leq 1 \\ 0 & \end{cases}$$

$$\leq \|f \cdot \chi\|_p + \|(1-\chi) f\|_p$$

$$\leq \|f\|_\infty \underbrace{\|\chi\|_p}_{=: c_1} + \underbrace{\| f g g^{-1} (1-\chi)\|_p}_{\leq \|fg\|_\infty \underbrace{\|g^{-1}(1-\chi)\|_p}_{= \left(\int_{\|x\|>1} \|x\|^{-2np} dx \right)^{1/p} =: c_2}} \qquad \text{mit } g(x) := \|x\|^{2n}$$

$\square$

Satz: (i) $\boxed{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$

(ii) $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto \hat{f}$ ist ein Automorphismus

Beweis: (i) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$: $x \mapsto x^\alpha f(x)$ ist beschränkt

$$\overset{\text{Satz über die Abl. von } \hat{f}}{\Longrightarrow} \quad \hat{f} \in C^\infty \text{ und es gilt}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n: \quad k^\alpha \partial^\beta \hat{f} = (-i)^{|\alpha+\beta|} \hat{g}$$

wobei: $g(x) := \partial^\alpha x^\beta f(x)$

Wegen $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und damit $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) folgt aus (i) zusammen mit dem Umkehrsatz & der Tatsache, dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Satz: (Plancherel) Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$ gilt:

$$\boxed{\langle \hat f, \hat g \rangle = \langle f, g \rangle} \quad \text{und damit} \quad \boxed{\| \hat f \|_2 = \| f \|_2}$$

(analog zu Parseval-Relation für F.-Reihen)

Beweis:

$$\langle \hat f, \hat g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat f(k)}\, \hat g(k)\, dk$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \iint_{\mathbb{R}^n} e^{ikx}\, \overline{f(x)}\, dx\, \hat g(k)\, dk$$

$$\underset{\text{Fubini (gilt wegen } \bar f \hat g \in \mathcal{S} \subseteq L^1)}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \iint e^{ikx}\, \hat g(k)\, dk\, \overline{f(x)}\, dx$$

$$\underset{\text{Umkehrsatz}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx \qquad \square$$

Satz (Cauchy-Schwarz) Für $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\boxed{|\langle f, g \rangle| \le \| \bar f g \|_1 \le \| f \|_2 \cdot \| g \|_2}$$

(falls die Ausdrücke in $[0, \infty]$ definiert sind).

(wegen $\| f \|_2 = \| \bar f \|_2$ gilt dann auch: $\| f g \|_1 \le \| f \|_2 \| g \|_2$)

Beweis: Wir dürfen annehmen, dass $0 < \| f \|_2, \| g \|_2 < \infty$, und wegen Homogenität der drei Ausdrücke ist o.B.d.A. $\| f \|_2 = \| g \|_2 = 1$.

$$|\langle f, g \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx \right|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} | \overline{f(x)}\, g(x) |\, dx = \| \bar f g \|_1$$

$$\underset{2|ab| \le |a|^2 + |b|^2}{\le} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 + |g(x)|^2\, dx = \frac{1}{2} \left(\| g \|_2^2 + \| f \|_2^2 \right) = 1$$

$\square$

Bemerkung: allgemein gilt für $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$(f \in L^p \wedge g \in L^q) \Rightarrow fg \in L^1 \text{ mit } \boxed{\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q}$$

„Hölder Ungleichung"

Anwendung: Heisenberg'sche Unschärferelation (Schwartz-Raum Version)

Satz: Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_2 = 1$, dann gilt:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 \, dx \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} k^2 |\hat{f}(k)|^2 \, dk \right) \geq \frac{1}{4}$$

Interpretation:
- In der QM sind $|f(x)|^2$ & $|\hat{f}(k)|^2$ Wahrscheinlichkeitsdichten für Ort bzw. Impuls, d.h. links steht ein Produkt der Varianzen (bei zentrierten Größen) von Ort & Impuls.
- Analoge Beziehungen lassen sich auch für die Lokalisierung eines Signals in der Zeitdomäne & im Frequenzraum formulieren.

Beweis: zu beweisen ist: $\|xf\|_2 \cdot \|k\hat{f}\|_2 \geq \frac{1}{2}$

Es gilt $\|k\hat{f}\|_2 = \|\widehat{f'}\|_2 \underset{\text{Plancherel}}{=} \|f'\|_2$, also

$$\|xf\|_2 \cdot \|k\hat{f}\|_2 = \|xf\|_2 \cdot \|f'\|_2 \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} |\langle xf, f' \rangle|$$

Für das Skalarprodukt gilt:

$$\langle xf, f' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\overline{f(x)}\, f'(x) \, dx$$

$$= \underbrace{\left[x|f(x)|^2 \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \text{ da } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\overline{f(x)} + x\overline{f'(x)} \right) dx$$

$$= -1 - \overline{\langle xf, f' \rangle}$$

und demnach $\operatorname{Re} \langle xf, f' \rangle = -\frac{1}{2}$, also $|\langle xf, f' \rangle| \geq \frac{1}{2}$ $\square$

Bemerkung: mit $f(x) = c\, e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$, $c := (2\pi\sigma^2)^{-1/4}$ erhalten wir

$\hat{f}(k) = c\sqrt{2}\,\sigma\, e^{-k^2\sigma^2}$, so dass sich für das Produkt der Varianzen ergibt:

$$\sigma^2 \cdot \frac{1}{4\sigma^2} = \frac{1}{4} \quad \text{d.h. '=' in der Unschärferelation}$$

Satz: (Fouriertransformation auf L^2)

Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ läßt sich eindeutig und stetig von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen, so dass die resultierende Abbildung $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ linear und „unitär" ist, d.h.

$$\boxed{\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle = \langle f, g\rangle} \quad \forall f,g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

(d.h. insbesondere $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$.)

Beweisidee: Approximation von $f \in L^2$ durch $f_j \in \mathcal{S}$ mit $\|f_j - f\|_2 \to 0$

$\Rightarrow$ f_j ist Cauchy-Folge in L^2 & $\hat{f}_j$ existiert

$\Rightarrow$ $\hat{f}_j$ ist -"- in L^2

$\Rightarrow$ $\hat{f}_j$ konvergiert in L^2 $\square$

Bemerkung zur Relation zw. L^1 & L^2:

- $x \mapsto \begin{cases} x^{-1/2}, & x \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist in L^1 aber nicht in L^2
- $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ ist in $L^2(\mathbb{R})$ aber nicht in $L^1(\mathbb{R})$ ($\to$ Übung)
- Definiert man L^p nicht auf $\mathbb{R}^n$ sondern auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mu(\Omega) < \infty$ und charakteristischer Fkt. $\chi_\Omega(x) := \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0 \end{cases}$, dann folgt aus Cauchy-Schwarz:

$$\|f\|_1 = \|f\chi_\Omega\|_1 \leq \|f\|_2\, \|\chi_\Omega\|_2 = \|f\|_2\, \mu(\Omega)^{1/2}$$

D.h. insbesondere $L^2(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$. Mittels Hölder Ungl. zeigt man analog: $\mu(\Omega) < \infty \wedge 1 \leq p < q \leq \infty \Rightarrow L^q(\Omega) \subsetneq L^p(\Omega)$