Def.: Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert $\int_A dx =: vol(A)$ das „<u>n-dim. Volumen</u>" (kurz „Volumen") von A, falls das Integral existiert.

Ein weiteres nützliches Werkzeug ist eine Version des Satzes von Fubini für sog. „Normalbereiche":

Def.: Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt „<u>Normalbereich</u>", wenn sie wie folgt konstruiert ist:

$$A_1 := [a_1, b_1] \subseteq \mathbb{R}$$

$$A_k := \left\{ (x,y) \in A_{k-1} \times \mathbb{R} \;\middle|\; a_k(x) \leq y \leq b_k(x) \right\} \subseteq \mathbb{R}^k$$

mit $a_k, b_k \in C(A_{k-1})$ für $k = 2, \dots, n$

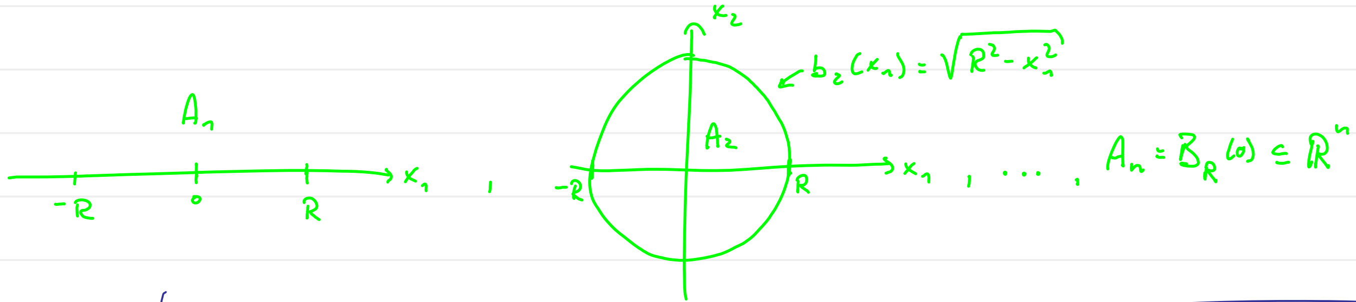
$$A := A_n \text{ wobei stets } a_k \leq b_k \;\; \forall k.$$

Bemerkung: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Normalbereich $\Rightarrow$
- ∂A ist vom Lebesgue-Maß Null in $\mathbb{R}^n$
- A ist kompakt

Bsp.: Kugel $\overline{B}_R(0)$:

$$A_1 = [-R, R]$$

$$b_k(x) = -a_k(x) = \sqrt{R^2 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2}$$

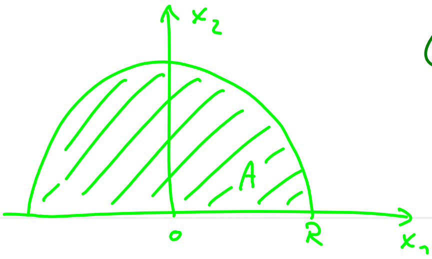


Satz: (Fubini für Normalbereiche)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Normalbereich und $f: A \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

Dann gilt
$$\int_A f(x)\, dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{a_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1,\dots,x_n)\, dx_n \dots dx_1,$$
wenn alle Integrale existieren.

Beweis: beruht auf Fubini für Quader ...



Bsp.: Schwerpunkt eines Halbkreises $A \subseteq \mathbb{R}^2$

„Gesamtmasse" $M := \int_A dx = \frac{\pi}{2} R^2$

x_2-Koordinate des Schwerpunkts:

$$\frac{1}{M}\int_A x_2 \, dx \overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{M}\int_{-R}^{R}\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x_1^2}} x_2 \, dx_2\right) dx_1 = \frac{1}{M}\int_{-R}^{R} \frac{R^2-x_1^2}{2} \, dx_1$$

$$= \frac{1}{2M}\left(2R^3 - \frac{2}{3}R^3\right) = \frac{4}{6}\,\frac{2R^3}{\pi R^2} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\,\frac{R}{\pi}}}$$

x_1-Koordinate ist 0

... nun zu „uneigentlichen" Riemann-Integralen:

Def.: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine bel. Teilmenge. $\{A_k \subseteq \mathbb{R}^n\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq A$ heißt „<u>ausschöpfende Folge</u>" <u>für A</u> wenn gilt

(0) $\forall k \in \mathbb{N}$: A_k beschränkt $\wedge$ ∂A_k vom Lebesgue-Maß Null,

(i) $\forall R \in (0,\infty)\ \forall k \in \mathbb{N}$: existiert $\int_{(A\setminus A_k)\cap B_R(0)} dx =: \operatorname{vol}\left((A\setminus A_k)\cap \overline{B}_R(0)\right)$,

(ii) $\forall R \in (0,\infty)$: $\lim_{k\to\infty} \operatorname{vol}\left((A\setminus A_k)\cap \overline{B}_R(0)\right) = 0$.

Bsp.:

- $A = \mathbb{R}^n$ wird sowohl durch Kugeln $(A_k = \overline{B}_k(0))$ als auch durch Würfel $(A_k = [-k,k]^n)$ ausgeschöpft.
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \in (0,1]\}$ wird durch $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \in [\frac{1}{k}, 1]\}$ ausgeschöpft.