FOURIERTRANSFORMATION

Def.: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die „Fouriertransformierte" $\hat{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiert als

$$\boxed{\hat{f}(k) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} f(x)\, dx}\ , \text{ wobei } k\cdot x := \sum_{l=1}^{n} k_l x_l$$

Bemerkungen:
- mit f ist auch $x \mapsto e^{-ikx} f(x)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, so dass das Integral existiert.
- für die "2π"-Vorfaktoren gibt es unterschiedliche Konventionen (sowohl vor dem Integral als auch im Exponenten)
- Die „Fouriertransformation" $f \mapsto \hat{f}$ ist oft ein Übergang der Art
  Zeit-Domäne $\to$ Frequenzraum
  Ortsraum $\to$ „k-Raum" / Impulsraum

Korollar (Elementare Eigenschaften der F.T.):
Sei: $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in (0,\infty)$, Dann gilt

(i) $f \mapsto \hat{f}$ ist linear in f

(ii) $g(x) = f(x-h) \Rightarrow \hat{g}(k) = e^{-ik\cdot h}\hat{f}(k)$

(iii) $g(x) = e^{ih\cdot x} f(x) \Rightarrow \hat{g}(k) = \hat{f}(k-h)$

(iv) $g(x) = f(\frac{x}{\lambda}) \Rightarrow \hat{g}(k) = \lambda^n \hat{f}(\lambda k)$

Beweis:
(i) folgt aus Linearität des Integrals

(ii) $\int e^{-ik\cdot x} f(x-h)\, dx \underset{y=x-h}{=} \int e^{-ik\cdot h} e^{-ik\cdot y} f(y)\, dy$

(iii) $\int e^{ih\cdot x} e^{-ik\cdot x} f(x)\, dx = \int e^{-i(k-h)\cdot x} f(x)\, dx$

(iv) $\int e^{-ik\cdot x} f(\frac{x}{\lambda})\, dx = \lambda^n \int e^{-i\lambda k\cdot y} f(y)\, dy$

$y = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \frac{\partial x_j}{\partial y_l} = \delta_{jl}\lambda$

$\square$

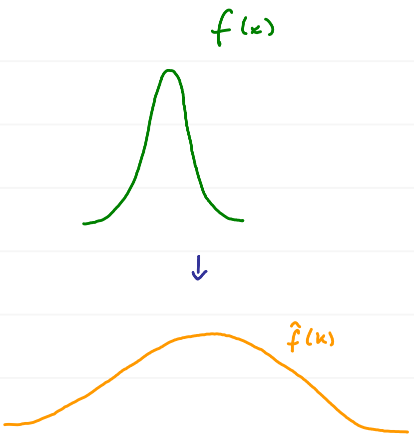
Bsp. 1: Für $f(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\, x \cdot A x\right]$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit ist

$$\boxed{\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\, k \cdot A^{-1} k\right]}$$

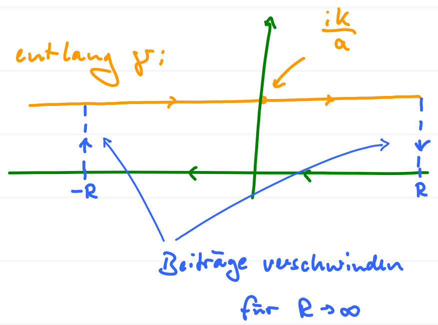
Beweis: zunächst $n=1$; $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx - \frac{1}{2} a x^2}\, dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{a}{2}\left(x + \frac{ik}{a}\right)^2\right] dx \quad e^{-\frac{k^2}{2a}}$$

$$= (2\pi)^{-1/2}\, e^{-\frac{k^2}{2a}} \int_{\gamma} \exp\left[-\frac{a}{2} z^2\right] dz$$



Komplexes Wegintegral entlang γ:



$$= (2\pi)^{-1/2}\, e^{-\frac{k^2}{2a}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}\, dx}_{=\sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-\frac{k^2}{2a}}$$

Für $n > 1$ diagonalisieren wir $A = U^T \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} U$ wobei: $a_i > 0$ & $|\det(U)| = 1$

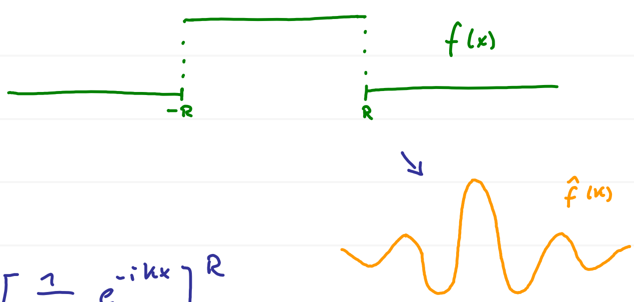
und verwenden den Transformationssatz für $x \mapsto \varphi(x) = Ux$. Dann ist

$$\hat{f}(k) = \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(Uk)_l x_l - \frac{1}{2} a_l x_l^2}\, dx_l = \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_l}}\, e^{-\frac{(Uk)_l^2}{2a_l}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\, k \cdot A^{-1} k\right]$$

$\square$

Bsp. 2: $n=1$, $R > 0$, $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



$$\boxed{\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin(Rk)}{k}}$$

Beweis: $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-R}^{R} e^{-ikx}\, dx = (2\pi)^{-1/2} \left[\frac{1}{-ik} e^{-ikx}\right]_{-R}^{R}$

$$= (2\pi)^{-1/2}\, 2\, \frac{e^{ikR} - e^{-ikR}}{2ik} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin(Rk)}{k}$$

$\square$

Bemerkung: • $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ ist nicht absolut integrierbar. D.h.

$$f \in L^1 \not\Rightarrow \hat{f} \in L^1 \quad \text{aber es gilt } \hat{f} \in L^\infty:$$

Satz: Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt:

(i) $\hat{f}$ ist stetig

(ii) $\hat{f}$ ist beschränkt mit $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$

$\forall x: f(x) \geq 0 \Rightarrow \|\hat{f}\|_\infty = \|f\|_1 (2\pi)^{-\frac{n}{2}} = \hat{f}(0)$

(iii) $\lim_{\|k\| \to \infty} \hat{f}(k) = 0$

Beweis: (i) Wähle eine bel. Folge $k_n \to k$. Dann ist

$$|\hat{f}(k_n) - \hat{f}(k)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|f(x)| \left| e^{-ik_n \cdot x} - e^{-ik\cdot x} \right|}_{=: g_n(x)} dx$$

Da $|g_n(x)| \leq 2|f(x)|$, folgt aus dem Satz über majorisierte Konvergenz, dass $\hat{f}(k_n) \to \hat{f}(k)$ wegen $g_n \to 0$ f.ü. für $n \to \infty$.

(ii) $$\|\hat{f}\|_\infty \overset{(i)}{=} \sup_k |\hat{f}(k)| = \sup_k \left| (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} f(x)\, dx \right|$$

"=" für $k=0 \wedge f \geq 0$

$$\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_1$$

(iii) **Skizze:**

$$\hat{f}(k) \overset{-1 = e^{i\pi}}{=} -(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ik\cdot\left(x - \frac{\pi k}{\|k\|^2}\right)} dx$$

$$= -(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f\left(y + \frac{\pi k}{\|k\|^2}\right) e^{-ik\cdot y}\, dy$$

Damit ist $$2\hat{f}(k) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(f(x) - \underbrace{f\big(x + \tfrac{\pi k}{\|k\|^2}\big)}_{=:\, f_k(x)} \Big) e^{-ik\cdot x}\, dx\ ,$$ also

$$2|\hat{f}(k)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f - f_k\|_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wäre noch z.z.}}}{\longrightarrow} 0 \quad \text{für } \|k\| \to \infty \qquad \square$$

<u>Satz:</u> Sei $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$. Dann ist

$$\boxed{\widehat{\partial^\alpha f}(k) = i^{|\alpha|} k^\alpha \hat{f}(k)}$$

wobei $|\alpha| := \sum_{l=1}^n \alpha_l$, $k^\alpha := \prod_{l=1}^n k_l^{\alpha_l}$, $\partial^\alpha := \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$

<u>Beweis</u> für $n = m = 1$; ($m > 1$ folgt mittels Induktion & $n > 1$ mittels part. Int.)

$$\widehat{f'}(k) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f'(x)\, dx$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{=} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[e^{-ikx} f(x) \right]_{-\infty}^{\infty} + ik \hat{f}(k)$$

Da $f' \in L^1$, existiert $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = f(0) + \lim\limits_{x \to \pm\infty} \int_0^x f'(y)\, dy$

und wegen $f \in L^1$ gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ $\square$

<u>Satz:</u> Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $m \in \mathbb{N}$. Falls $x \mapsto x^\alpha f(x)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, dann gilt:

$$\boxed{\hat{f} \in C^m(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \partial^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|}\, \widehat{x^\alpha f(x)}}$$

<u>Beweis</u> für $n=m=1$: $\frac{\hat{f}(k+\Delta)-\hat{f}(k)}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{-ix\Delta}-1)}{\Delta}\, e^{-ikx} f(x)\,dx$

Da $|x| \geq \left|\frac{e^{-ix\Delta}-1}{\Delta}\right|$ & $x \mapsto x f(x)$ in L^1 ist, folgt aus dem Satz über majorisierte Konvergenz:

$$\hat{f}'(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\Delta\to 0}\left(\frac{e^{-ix\Delta}-1}{\Delta}\right) e^{-ikx} f(x)\,dx = -i\,\hat{g}(k)$$

wobei $g(x) = x f(x)$. $\square$