Bemerkung: Ist $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n$ auf $K_{0,r}(z_0)$, $r>0$ mit isolierter Singularität bei z_0, dann gilt:

z_0 ist hebbar $\Leftrightarrow$ Hauptteil verschwindet

z_0 ist Pol n'ter Ordnung $\Leftrightarrow$ Hauptteil bricht ab mit $c_{-n} \neq 0$ und $c_{-k} = 0$ $\forall k > n$

z_0 ist wesentl. $\Leftrightarrow$ Hauptteil bricht nicht ab

Bsp.e:

- $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)} = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z}$

Partialbruchzerlegung:

Ansatz $\dfrac{1}{z(z-1)} = \dfrac{a_1}{z} + \dfrac{a_2}{z-1}$

$1 = (z-1)a_1 + z\,a_2$

Koeffizientenvergleich: $a_1 = -1$

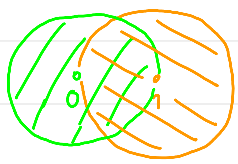
$a_1 + a_2 = 0$

$= -\dfrac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ auf $K_{0,1}(0)$

$= \dfrac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n$ auf $K_{0,1}(1)$

$-\dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{1-(1-z)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n$

$K_{0,1}(0)$



$K_{0,1}(1)$

Pole erster Ordnung bei 0 & 1 spiegeln sich wider durch $c_{-1} \neq 0$ und $c_{-n} = 0$ $\forall n > 1$.

- $f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} z^{-n}$ auf $K_{0,\infty}(0)$

wesentliche Singularität bei $0 \Leftrightarrow$ Hauptteil bricht nicht ab.

Lemma: Konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n =: f(z)$ auf $K_{r,R}(z_0)$ mit $r<R$, dann gilt: $c_{-1} = 0 \Rightarrow f$ besitzt auf $K_{r,R}(z_0)$ eine holomorphe Stammfkt.

Beweis: $F(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} \dfrac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} \Rightarrow F' = f$. $\square$

Residuenkalkül

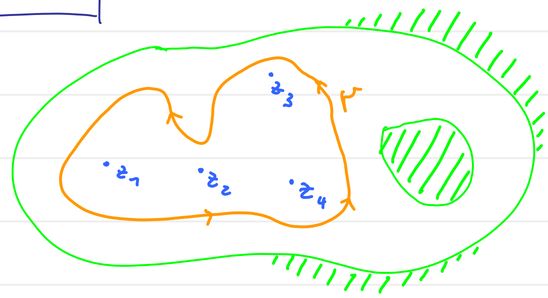
Def.: Sei $f: K_{0,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma(t) := z_0 + \rho e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$ und $\rho \in (0,R)$.

$$\boxed{\mathrm{Res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz}$$

heißt das „Residuum" von f bei z_0.

Aus dem Satz über die Laurentreihenentw. folgt dann:

Korollar: $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n \Rightarrow \boxed{\mathrm{Res}_{z_0}(f) = c_{-1}}$



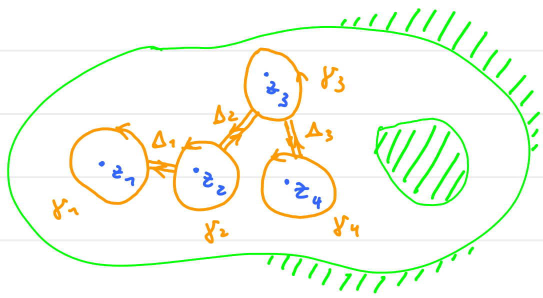
Satz: (Residuensatz)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $S := \{z_1, \dots, z_n\} \subseteq U$ und $\gamma: [0,1] \to U \setminus S$ eine geschlossene Kurve ohne Überschneidungen, die in U null-homotop ist und S gegen den Uhrzeigersinn einmal umkreist.

Dann gilt für jede holomorphe Fkt. $f: U \setminus S \to \mathbb{C}$:

$$\boxed{\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_j}(f)}$$

Beweis: Ersetze γ durch eine dazu frei homotope Kurve $\tilde{\gamma}$:



$$„\ \gamma \approx \tilde{\gamma} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \gamma_j}_{\text{Kreis um } z_j} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \Delta_j - \sum_{j=1}^{n-1} \Delta_j}_{\text{Verbindungswege heben sich weg}}\ “$$

Damit ist $\oint_\gamma f(z)\, dz = \oint_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{n} 2\pi i\, \mathrm{Res}_{z_j}(f)$

$\square$

Berechnung von Residuen:

- Wenn f bei z_0 einen Pol der Ordnung $n \leq k$ hat, dann besitzt $z \mapsto (z-z_0)^k f(z)$ um z_0 eine Potenzreihenentwicklung $(z-z_0)^k f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l (z-z_0)^l$ und es gilt $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = a_{k-1}$. Also gilt

$$\boxed{\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}} \left((z-z_0)^k f(z) \right)} \qquad (*)$$

- Sind g, h bei z_0 holomorph mit $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$. Dann gilt für $f(z) := \frac{g(z)}{h(z)}$:

$$\boxed{\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}$$

da wegen $(*)$: $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} \left((z-z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \right)$

$$= g(z_0) \lim_{z \to z_0} \frac{(z-z_0)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Beispiele:

- $f(z) = (1+z^4)^{-1}$ hat 4 einfache Pole bei $z_k = e^{i\frac{\pi}{4}(2k+1)}$, $k \in \{0,1,2,3\}$

$h'(z_k) = 4 z_k^3 \Rightarrow \mathrm{Res}_{z_k}(f) = \frac{1}{4} z_k^{-3}$

- $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ hat einfache Pole bei $z_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ da $z \mapsto \sin z$ dort einfache Nullstellen besitzt.

$\mathrm{Res}_{z_n}(f) = \frac{1}{\cos(z_n)} = (-1)^n$