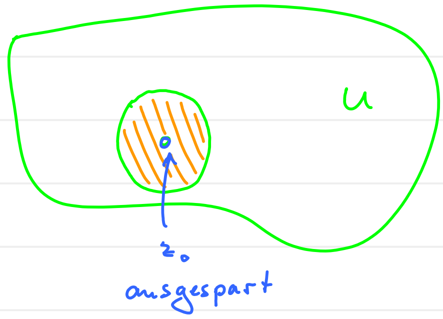
Singularitäten

Def.: • Sei f holomorph auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$. $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ heißt „isolierte Singularität", wenn $\exists \varepsilon > 0: \left(|z - z_0| \in (0, \varepsilon) \Rightarrow z \in U \right)$.



Def.: Sei z_0 eine isolierte Singularität von $f: U \to \mathbb{C}$. U offen.

- z_0 heißt „hebbar", wenn f eine analytische Fortsetzung auf $U \cup \{z_0\}$ besitzt.
- z_0 heißt „Pol", wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass z_0 hebbare Singularität von $(z - z_0)^n f(z)$ ist. Das kleinste derartige n heißt „Ordnung" des Pols.
- z_0 heißt „wesentliche Singularität" falls sie weder hebbar noch Pol ist.

Bsp.:

- $f: z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ hat als holomorphe Fkt. auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ hebbare Singularität bei 0. Analytische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ ist $\tilde{f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} (-1)^n$
- Ist $g: U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $g(z_0) \neq 0$, dann hat $f(z) := \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$ bei z_0 einen Pol n-ter Ordnung.
- $f(z) := e^{1/z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und hat bei 0 wesentliche Singularität.

Satz: (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

Sei $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph mit isolierter Singularität bei z_0. Diese ist hebbar, wenn

$$\exists c>0 \; \exists \varepsilon>0 \; \left(|z-z_0| \in (0,\varepsilon) \Rightarrow |f(z)| \leq c \right)$$

(d.h. wenn f in einer punktierten Umgebung beschränkt ist)

Beweis: Definiere $g: U \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $g(z) := \begin{cases} (z-z_0)^2 f(z), & \text{für } z \neq z_0 \\ 0 & \text{für } z = z_0 \end{cases}$

Da $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{|g(z)-g(z_0)|}{|z-z_0|} = \lim\limits_{z\to z_0} |z-z_0||f(z)| = 0$ ist g holomorph bei z_0

mit $g(z_0) = g'(z_0) = 0$ und deshalb $g(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$.

Also ist $\sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n-2}$ die analytische Fortsetzung von f. $\square$

D.h. wenn f um eine Singularität gutartig (im Sinne von beschränkt) ist, ist diese hebbar.

Ist die Singularität dagegen wesentlich, dann ist f 'beliebig wild' in ihrer Umgebung: Nach dem Satz von Picard nimmt f in jeder Umgebung um z_0 jeden Wert in $\mathbb{C}$ an, mit höchstens einer Ausnahme. z.B.:

$$\forall \varepsilon>0 \; \forall w \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \; \exists z \in \mathbb{C}: \; |z| \in (0,\varepsilon) \wedge e^{1/z} = w$$

Laurentreihen

Motivation: Verallgemeinerung von Potenzreihen um holomorphe Fkt.en in der Nähe von isolierten Singularitäten beschreiben zu können.

Def.: Für Koeffizienten $c \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ und $z, z_0 \in \mathbb{C}$ heißen die Reihen

$H := \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}$ & $N := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ „Haupt-" und „Nebenteil" der „Laurentreihe"

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n := H + N$$

Diese heißt (absolut, gleichmäßig, ...) konvergent, falls dies für H und N zutrifft.

Bemerkung: Ist $\frac{1}{r} \in [0, \infty]$ Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n$ und $R \in [0, \infty]$ Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, dann

konvergiert die Laurentreihe auf dem Kreisring $K_{r,R}(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| \in (r, R) \}$ und ist dort holomorph.

Hauptteil konvergiert | Nebenteil konvergiert | Laurentreihe konvergiert

Lemma: Konvergiert $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$ auf $K_{r,R}(z_0)$, dann gilt für $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$, $t\mapsto z_0+\varrho e^{2\pi i t}$ falls $\varrho\in(r,R)$:

$$(*)\qquad \boxed{c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz} \qquad \forall n\in\mathbb{Z}$$

Beweis:
$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \underset{\text{gleichm. Konvergenz}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\oint_\gamma (z-z_0)^{k-n-1}\,dz$$

$$=\sum_k c_k\int_0^1\left(\varrho e^{2\pi i t}\right)^{k-n-1}2\pi i\varrho e^{2\pi i t}\,dt = 2\pi i\sum_k c_k \overbrace{\int_0^1\left(\varrho e^{2\pi i t}\right)^{k-n}dt}^{\delta_{k,n}}$$

$$=2\pi i\, c_n \qquad \square$$

Satz: (Laurentreihenentwicklung)

Ist $f: K_{r,R}(z_0)\to\mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

$$\boxed{f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n} \quad \text{mit } c_n \text{ wie in } (*).$$

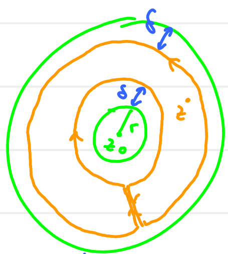
Beweis: Sei $\gamma:[0,1]\to K_{r,R}(z_0)$, $\gamma(t)=z+\varepsilon e^{2\pi i t}$ mit $\varepsilon>0$.

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt dann

Umlauf gegen Uhrz.

$$2\pi i f(z)=\oint_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\oint_{|\zeta-z_0|=R-\delta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\oint_{|\zeta-z_0|=r+\delta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

frei homotop zu



$$=\oint_{|\zeta-z_0|=R-\delta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left(\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\right)d\zeta+\frac{1}{z-z_0}\oint_{|\zeta-z_0|=r+\delta}f(\zeta)\left(\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}\right)d\zeta$$

Einsetzen der geometrischen Reihen + termweise Integration

$\to$ Laurentreihe. $\square$