Anmerkungen zur Konvergenz

Aus dem Potenzreihenentwicklungssatz folgt:

Korollar: Sei $f: U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und in einer offenen Umgebung um $z_0 \in U$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad (*).$$

Dann gilt für den Konvergenzradius ρ von $(*)$:

$$\rho \geq \inf_{z \in \partial U} |z - z_0| =: \mathrm{dist}(z_0, \partial U)$$

Satz (von Weierstraß): Ist die Folge $(f_n : U \to \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$ holomorph auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ und so, dass $f_n \to f$ gleichmäßig konvergiert, dann gilt:

(i) f ist holomorph,

(ii) $f_n' \to f'$ konvergiert gleichmäßig auf kompakten $K \subseteq U$.

Beweis: (i) Ist γ eine null-homotope geschlossene Kurve in U, dann gilt:

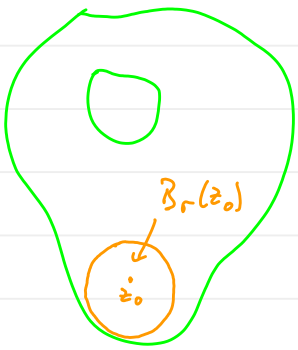
$$0 = \lim_{n \to \infty} \oint_\gamma f_n(z)\,dz \underset{\uparrow}{=} \oint_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,dz = \oint_\gamma f(z)\,dz$$

gleichmäßige Konvergenz

Satz von Morera $\Rightarrow$ f holomorph.

(ii) Wähle $z_0 \in U$ und $B_r(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r \}$, so dass $B_r(z_0) \subseteq U$. Aus der Potenzreihenentw. folgt

$$f'(z_0) = c_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz. \qquad \|g\|_K := \sup_{z \in K} |g(z)|$$



$$|f_n'(z_0) - f'(z_0)| \underset{\uparrow}{\leq} \frac{1}{r} \sup_{z \in B_r(z_0)} |f_n(z) - f(z)| \qquad \forall\, r < \mathrm{dist}(z_0, \partial U)$$

Standardabsch.

$$\Rightarrow \quad \|f_n' - f'\|_K \leq \mathrm{dist}(K, \partial U)^{-1} \, \|f_n - f\|_K$$

$\square$

Bemerkung: (ii) gilt nicht für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bsp.: $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx) \to 0$ gleichm.

aber f_n' konvergiert nicht

... weitere Konsequenzen aus Cauchy's Integralsatz & -formel

Korollar: (Differentiation durch Integration):

Ist $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ und $z \in U$, $r > 0$, so dass $B_r(z) := \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - z| \leq r\} \subseteq U$. Dann ist

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi}$$

mit $\gamma(t) = z + re^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$.

Beweis: $f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\xi - z)^k \Rightarrow f^{(n)}(z) = n! \, c_n$ $\square$

Satz (von Liouville): Ist $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt (d.h. $\exists c \in \mathbb{R} \; \forall z \in \mathbb{C}: |f(z)| \leq c$), dann ist f konstant (d.h. $\exists c' \in \mathbb{C} \; \forall z \in \mathbb{C}: f(z) = c'$).

Beweis: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \, d\xi$ wobei $\gamma_r(t) = re^{2\pi i t}$, $r > 0$.

Also gilt $|c_n| \underset{\text{Standardabschätzung}}{\leq} \frac{1}{2\pi} 2\pi r \sup_{z \in \gamma_r} \frac{|f(z)|}{r^{n+1}} \underset{f \text{ beschränkt}}{\leq} \frac{c}{r^n}$

Da f holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, können wir $r \to \infty$ betrachten. Also $|c_n| \leq \lim_{r \to \infty} \frac{c}{r^n} = 0$ und damit $f(z) = c_0$ $\square$

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)
Jedes Polynom $f(z) := \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ mit $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}^{n+1}$, $c_n \neq 0$ besitzt eine Nullstelle, d.h. $\exists z_0 \in \mathbb{C}: f(z_0) = 0$.

Beweis: Angenommen f besäße keine Nullstelle.
$g(z) := \frac{1}{z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und f ist holomorph auf $\mathbb{C}$.
Damit wäre $z \mapsto \frac{1}{f(z)} = g \circ f(z)$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$.
Außerdem gilt $\frac{1}{f(z)} \to 0$ für $|z| \to \infty$, d.h. $\exists R \in \mathbb{R}: |z| > R \Rightarrow |f(z)| \geq |f(0)|$
und demnach

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{1}{|f(z)|} = \sup_{|z| \leq R} \frac{1}{|f(z)|} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kompaktheit + Stetigkeit}}}{=} \max_{|z| \leq R} \frac{1}{|f(z)|} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{keine Nullstelle}}}{<} \infty .$$

Nach dem Satz von Liouville wäre dann $\frac{1}{f(z)} = \text{const.}$ ↯ ($c_n \neq 0$!)

□

Korollar: (Faktorzerlegung) Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}^{n+1}$ mit $c_n = 1$. Dann gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, so dass

$$\boxed{f(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)}$$

Beweis: Benutze die Identität $(z^k - \alpha^k) = (z-\alpha) \sum_{j=0}^{k-1} z^j \alpha^{k-1-j}$. (∗)
Ist $f(\alpha_n) = 0$, dann gilt

$$f(z) = f(z) - f(\alpha_n) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z^k - \alpha_n^k)$$

und wegen (∗) können wir einen Faktor $(z - \alpha_n)$ ausklammern, so dass

$f(z) = (z - \alpha_n) f_{n-1}(z)$ wobei f_{n-1} Polynom vom Grad $n-1$ ist.

Iteration mit $f_k(\alpha_k) = 0$ führt dann auf die Faktorzerlegung.

□