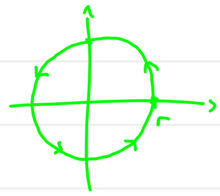
Folgerungen aus dem Integralsatz von Cauchy-Goursat:
(= Cauchyscher Integralsatz)

Lemma: Sei $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$, $\gamma(t):=re^{2\pi i t}$, $r>0$.

Dann gilt $\displaystyle\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$.



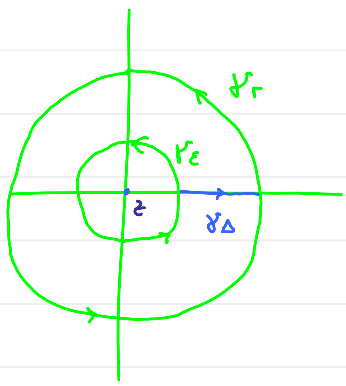
Beweis: $\displaystyle\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^1 \frac{1}{r}e^{-2\pi i t}\,2\pi i r\,e^{2\pi i t}\,dt = 2\pi i$ $\square$

Satz (Cauchysche Integralformel) Sei $U\subseteq\mathbb{C}$ offen, $f:U\to\mathbb{C}$ holomorph, $B_r(z):=\{\zeta \mid |\zeta-z|\le r\}\subseteq U$ und $\gamma_r:[0,1]\to U$, $\gamma_r(t):=z+re^{2\pi i t}$.

Dann gilt

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta}$$

Beweis: In $U\setminus\{z\}$ ist $\zeta\mapsto\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}$ holomorph und für $\varepsilon\in(0,r]$ ist γ_ε homotop zu $\gamma_\Delta+\gamma_r-\gamma_\Delta$



Also ist $\displaystyle\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \oint_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$

Bem.: γ_ε & γ_r heißen „frei homotop"

$$= \oint_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta + \underbrace{\oint_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta}_{\text{„ Lemma}}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\quad 0 \quad + \quad f(z)\,2\pi i$$

wegen $\displaystyle\left|\oint_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta\right| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Standard-}\\ \text{abschätzung}}}{\le} 2\pi\varepsilon \sup_{\zeta\in B_\varepsilon(z)}\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right| \to 0$ da f holomorph

$\square$

Korollar (Mittelwerteigenschaft) Ist $f : B_r(z) \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt:

$$\int_0^1 f(z + re^{2\pi i t})\, dt = f(z)$$

Beweis:

$$\int_0^1 f(\underbrace{z + re^{2\pi i t}}_{=: \gamma_r(t)})\, dt = \int_0^1 \frac{f(z + re^{2\pi i t})}{2\pi i r e^{2\pi i t}}\, \dot{\gamma}_r(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\gamma_r(t))}{\gamma_r(t) - z}\, \dot{\gamma}_r(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = f(z) \qquad \square$$

Satz: (Potenzreihenentwicklung)

Sei: $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, $B_r(z_0)$ eine Kreisscheibe in U um $z_0 \in U$ mit Radius $r > 0$ und $\gamma(t) := z_0 + re^{2\pi i t}$. Dann gilt $\forall z \in B_r(z_0)$:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz}$$

Beweis: O.B.d.A. $z_0 = 0$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}}}_{= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\xi}\right)^n \text{ für } |z| < |\xi| = r}\, d\xi$$

gleichmäßige Konvergenz

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi$$

$\square$

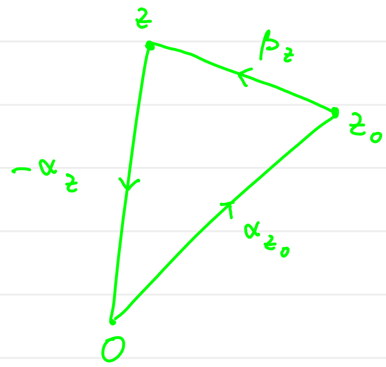
Korollar: Eine holomorphe Funktion ist beliebig oft komplex differenzierbar.

Beweis: Ist f holomorph bei z, gibt es eine Umgebung in der $f(z)$ und damit auch $f'(z)$ als Potenzreihe geschrieben werden kann. $\square$

Für den Satz von Cauchy-Goursat (f holomorph $\wedge$ γ null-homotop $\Rightarrow \oint_\gamma f(z)\,dz = 0$) gibt es folgende Umkehrung:

Satz (von Morera) Sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ & gilt für die Randkurve γ einer jeden ganz in U liegenden Dreiecksfläche $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$, dann ist f holomorph.

Beweis: Betrachte das Dreieck $(0, z, z_0)$ mit den Kurven $\alpha_z(t) := tz$, $\beta_z(t) := (1-t)z_0 + tz$ und damit "$\gamma = \alpha_{z_0} + \beta_z - \alpha_z$".



Für $F(z) := \int_{\alpha_z} f(\zeta)\,d\zeta$ gilt dann

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} \overset{\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 0}{=} \frac{1}{z - z_0} \int_{\beta_z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_0^1 f\big((1-t)z_0 + tz\big)\,dt$$

$$\longrightarrow f(z_0) \text{ für } z \to z_0 .$$

Damit ist F bei z_0 komplex differenzierbar mit $F'(z_0) = f(z_0)$ und durch verschieben des Dreiecks auf ganz U holomorph. Also ist auch $f = F'$ auf U holomorph.

$\square$

Damit haben wir:

f holomorph

$\Leftrightarrow$ f ist lokal als Potenzreihe darstellbar (= "analytisch")

$\Leftrightarrow$ $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ für null-homotope γ

$\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ ist reell diffbar & CR DGL sind erfüllt

$\Leftrightarrow$ f besitzt Stammfunktion auf einfach zus. Gebieten