Riemann-Integration im $\mathbb{R}^n$ & Mengen vom Maß Null

Def.: • Wir nennen $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ einen „Quader" wenn es $a, b \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.

• Praktische Kurzschreibweise: $Q =: [[a,b]]$

• Das „Volumen" eines Quaders ist $\mathrm{vol}(Q) := \prod_{i=1}^{n} |b_i - a_i|$

Erinnerung: Bisher können wir stetige Fkt.en auf Quadern integrieren.

Für $f \in C(Q, \mathbb{R})$ haben wir

$$\int_Q f(x)\,dx := \int_{[a_1,b_1]} \cdots \int_{[a_n,b_n]} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

unabh. von der Integrationsreihenfolge (Satz von Fubini).

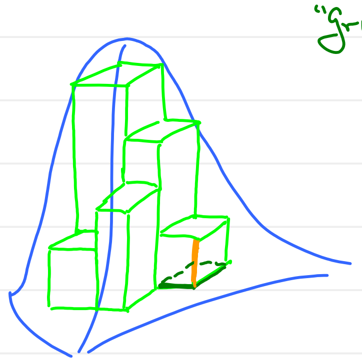
Für allgemeine Fkt.en $f: Q \to \mathbb{R}$ betrachten wir Zerlegungen $Z := \{Q_1, \ldots, Q_m\}$ von $Q = \bigcup_{\alpha=1}^{m} Q_\alpha$ in kleinere Quader Q_α, für die gilt $\alpha \neq \beta \Rightarrow \mathring{Q}_\alpha \cap \mathring{Q}_\beta = \emptyset$.

Wir definieren die Ober-/Untersumme

$$\overline{S}_Z(f) := \sum_{\alpha=1}^{m} \mathrm{vol}(Q_\alpha) \sup\{f(x) \mid x \in Q_\alpha\}$$

$$\underline{S}_Z(f) := \sum_{\alpha=1}^{m} \mathrm{vol}(Q_\alpha) \inf\{f(x) \mid x \in Q_\alpha\}$$

"Grundfläche" × "Höhe"



Def.: Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt, dann heißt f „<u>Riemann-integrierbar</u>" auf Q, wenn

$$\inf\{ \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \mid Z \} = 0$$

Das „<u>Riemann-Integral</u>" ist dann definiert durch

$$\int_Q f(x)\,dx := \inf \overline{S}_Z(f)$$

Bemerkung:
- Ist $f: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, dann gilt auch $\int_Q f(x)\,dx = \sup \underline{S}_Z(f)$ und das Integral kann als „Volumen" unter dem Graphen interpretiert werden.

Wir wollen alle auf Q Riemann-integrierbaren Funktionen charakterisieren. Dazu hilft es, wesentliche von unwesentlichen Mengen unterscheiden zu können:

Def.:
- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt „<u>Menge vom Lebesgue-Maß Null in $\mathbb{R}^n$</u>", wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele Quader $Q_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} Q_\alpha \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \mathrm{vol}(Q_\alpha) < \varepsilon .$$

(später mehr zum Lebesgue-Maß ...)

Bemerkungen:
- wir dürfen in der Def. die Q_α's o.B.d.A. durch offene Mengen der Form Q_α° ersetzen (durch „Aufblähen" der Quader um einen konstanten Faktor).

Bemerkungen:
- oft spricht man einfach von „Nullmenge" oder „Menge vom Maß Null".
- Ist $S \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass $Q \subseteq S$ für einen Quader mit $\mathrm{vol}(Q) \neq 0$, und $A : S \to \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ (d.h. A ist ein „Prädikat") dann nennt man A <u>„fast überall"</u> wahr, wenn $\{x \in S \mid \neg A(x)\}$ eine Menge vom Lebesgue-Maß Null ist.

Lemma: Sind $M_j \subseteq \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, Mengen vom Lebesgue-Maß Null in $\mathbb{R}^n$, dann gilt dies auch für $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j$.

Beweis: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es Quader $Q_{\alpha,j} \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass

$$M_j \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} Q_{\alpha,j} \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \mathrm{vol}(Q_{\alpha,j}) < \varepsilon 2^{-j}.$$

Für jede Abzählung der $Q_{\alpha,j}$ gilt damit

$$\sum_{\alpha,j} \mathrm{vol}(Q_{\alpha,j}) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \varepsilon 2^{-j} = \varepsilon\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = \varepsilon$$

$\square$

Korollar & Bsp.: $\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ist vom Lebesgue-Maß Null in $\mathbb{R}^n$.

Beweis: $\mathbb{Q}^n$ ist abzählbar & $\forall x \in \mathbb{Q}^n$ ist $\{x\} \subseteq \mathbb{R}^n$ Nullmenge. $\square$

Korollar & Bsp.: Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar, dann ist der Graph

$$G := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in Q\}$$

vom Lebesgue-Maß Null in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z = \{Q_\alpha\}$, so dass $\sum_{Q_\alpha \in Z} \mathrm{vol}(Q_\alpha)[\sup f(Q_\alpha) - \inf f(Q_\alpha)] < \varepsilon$.

$\tilde{Q}_\alpha := Q_\alpha \times [\inf f(Q_\alpha), \sup f(Q_\alpha)] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

erfüllt damit $G \subseteq \bigcup_\alpha \tilde{Q}_\alpha$ und $\sum_\alpha \mathrm{vol}(\tilde{Q}_\alpha) < \varepsilon$. ☐

Satz: (Lebesgue'sches Integrabilitätskriterium)

Eine beschränkte Funktion $f : Q \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf einem Quader Q ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie fast überall stetig ist.

Beweis: (nur "$\Leftarrow$") $M := \{x \in Q \mid f(x) \text{ unstetig}\}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es Quader $\{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ mit $M \subseteq \bigcup_j \mathring{R}_j$ und $\sum_j \mathrm{vol}(R_j) < \varepsilon$.

Zu jedem $x \in Q \setminus M$ gibt es einen Quader S_x mit $x \in \mathring{S}_x$ und

$$\forall x', x'' \in \mathring{S}_x \cap Q : \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Aus Kompaktheit von Q folgt, dass es zur offenen Überdeckung

$$Q \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathring{R}_j \cup \bigcup_{x \in Q \setminus M} \mathring{S}_x \quad \text{eine endl. Überdeckung}$$

$$Q \subseteq \bigcup_{j \in A} \mathring{R}_j \cup \bigcup_{x \in B} \mathring{S}_x \quad \text{gibt.}$$

Wähle nun eine Zerlegung $\{Q_\alpha\}$, so dass für jedes α gilt:

$$(\exists j \in A : Q_\alpha \subseteq R_j) \vee (\exists x \in B : Q_\alpha \subseteq S_x)$$

Dann ist $\sum_\alpha \mathrm{vol}(Q_\alpha)\left[\sup(f(Q_\alpha)) - \inf(f(Q_\alpha))\right]$

$$= \underbrace{\sum_{\text{"}\alpha\in A\text{"}} \cdots}_{\text{unstetiger}} + \underbrace{\sum_{\text{"}\alpha\in B\text{"}} \cdots}_{\text{stetiger Teil}}$$

$$\leq 2\|f\|_\infty \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{Q_\alpha \subseteq R_j} \mathrm{vol}(Q_\alpha) + \sum_{\text{"}\alpha\in B\text{"}} \varepsilon\, \mathrm{vol}(Q_\alpha)$$

$$\leq 2\|f\|_\infty\, \varepsilon + \varepsilon\, \mathrm{vol}(Q) = \varepsilon\left(2\|f\|_\infty + \mathrm{vol}(Q)\right)$$

$\square$

Folgerungen:

- Die „Dirichlet-Fkt." $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ ist nicht Riemann integrierbar, da die Menge $\{x\in[0,1] \mid f(x) \text{ unstetig}\} = [0,1]$ nicht vom Maß 0 ist.

- Damit ist die Klasse der Riemann-integrablen Fkt.en nicht abgeschlossen unter Limiten, da wir die Dirichlet Fkt. schreiben können als $f(x) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\cos(m!\,\pi x)\right)^{2n}$

- Abgeschlossenheit unter unendl. Summen gilt ebensowenig.

(all dies wird später mit dem Lebesgue-Integral kuriert)

Satz: (Fubini) Sind $Q_1\subseteq\mathbb{R}^{n_1}$, $Q_2\subseteq\mathbb{R}^{n_2}$, $Q:=Q_1\times Q_2\subseteq\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ Quader, $f:Q\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und existiert für jedes $x_2\in Q_2$ das Integral $\int_{Q_1} f(x_1,x_2)\,dx_1 =: g(x_2)$, dann ist g auf Q_2 Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_Q f(x)\,dx = \int_{Q_2} g(x_2)\,dx_2 = \int_{Q_2}\left(\int_{Q_1} f(x_1,x_2)\,dx_1\right)dx_2$$

Folgerung: Wenn alle Integrale existieren (!) dürfen wir die Integrationsreihenfolge also wieder vertauschen.

Def.: $f: A \to \mathbb{R}$ heißt „Riemann-integrierbar" auf einer beschränkten Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn das Riemann-Integral

$$\int_Q \tilde{f}(x)\,dx =: \int_A f(x)\,dx$$

existiert, wobei $Q \supseteq A$ ein Quader ist, und $\tilde{f}: Q \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$.

Satz: Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und ∂A vom Lebesgue-Maß Null in $\mathbb{R}^n$, dann ist eine beschränkte Fkt. $f: A \to \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar, wenn f auf A fast überall stetig ist.

Beweis: $\{x \in Q \mid \tilde{f}(x) \text{ unstetig}\} \subseteq \{x \in A \mid f(x) \text{ unstetig}\} \cup \partial A$, so dass die Aussage aus dem Lebesgue-Kriterium folgt. $\square$

Rechenregeln für Riemann-integrierbare Funktionen:

- $\int_A (f(x) + g(x))\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_A g(x)\,dx$
- $c \int_A f(x)\,dx = \int c\, f(x)\,dx$ für $c \in \mathbb{R}$

d.h. integrierbare Fkt.en bilden einen Vektorraum

- $\left| \int_A f(x)\,dx \right| \leq \int_A |f(x)|\,dx$ $\quad$ Δ-Ungleichung
- $\int_A f(x)\,dx = 0$ wenn A vom Lebesgue-Maß Null ist.
- für $f: A \to \mathbb{C}^n$ ist $\int_A f(x)\,dx$ komponentenweise zu betrachten.
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \int_{A \cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$