Lemma: Ist die m-dim. UMF $M \subseteq \mathbb{R}^n$ in $U \subseteq M$ als Graph von $f \in C^1(V \subseteq \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{n-m})$ gegeben, dann ist $\forall x \in U$: $G(x) = \mathbb{1}_m + f'(x)^T f'(x)$ & für $m = n-1$:

$$\boxed{g(x) = 1 + \|Df(x)\|^2}$$

Beweis: Wähle die Parametrisierung $\varphi: V \subseteq \mathbb{R}^m \to U \subseteq M$, $x \mapsto (x, f(x))$.
Dann ist $\varphi'(x)^T \varphi'(x) = \mathbb{1}_m + f'(x)^T f'(x)$, da $\varphi'(x)^T = (\mathbb{1}_m \;\; f'(x)^T)$.
Für $m = n-1$ hat $G(x)$ $m-1$ Eigenwerte 1 & einen E.w. $1 + \|Df(x)\|^2$.

$\square$

Lemma: Ist $\psi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \subseteq \mathbb{R}^3$ stetig diff.bar, dann gilt für die Gram'sche Determinante:

$$\boxed{\sqrt{g(y)} = \|\partial_1 \psi(y) \times \partial_2 \psi(y)\|_2}$$

Beweis: $\psi'(y) = \begin{pmatrix} \partial_1 \psi(y) & \partial_2 \psi(y) \end{pmatrix} \Rightarrow \psi'(y)^T \psi'(y) = \begin{pmatrix} \|\partial_1 \psi(y)\|^2 & \langle \partial_1 \psi(y), \partial_2 \psi(y) \rangle \\ \langle \partial_1 \psi(y), \partial_2 \psi(y) \rangle & \|\partial_2 \psi(y)\|^2 \end{pmatrix}$

Damit ist $\sqrt{g(y)} = \|\partial_1 \psi(y)\| \, \|\partial_2 \psi(y)\| \cdot \sqrt{1 - (\cos \measuredangle(\partial_1 \psi(y), \partial_2 \psi(y)))^2}$

$= \|\partial_1 \psi(y) \times \partial_2 \psi(y)\|$

$\square$

Gibt es für eine UMF keine globale Parametrisierung, definiert man das Integral $\int_\Omega f(x)\,dS(x)$ mit Hilfe eines Atlas und einer Zerlegung von f in Funktionen mit kleinem Träger …

<u>Def.:</u> Der „Träger" (support) von $f: U \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\boxed{\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}}}$$

Abschluss in U (Teilraumtopologie für $U \subseteq \mathbb{R}^n$!)

<u>Lemma:</u> Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $\{U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n\}_{\alpha=1}^k$ eine offene Überdeckung von M. Dann gibt es $\{f_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])\}_{\alpha=1}^k$, so dass

(i) $\mathrm{supp}(f_\alpha) \subseteq U_\alpha$

(ii) $\sum_{\alpha=1}^k f_\alpha(y) = 1 \quad \forall y \in M$

Die f_α's heißen eine der Überdeckung $\{U_\alpha\}$ untergeordnete <u>„Zerlegung der Eins"</u> auf M

<u>Beweisidee:</u>
- $\phi(x) := \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right], & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$ ist C^∞ mit $\mathrm{supp}(\phi) = \overline{B_R(0)}$
- konstruiere die f's durch Verschiebung & Stauchung von ϕ … ☐

<u>Def.:</u> Sei M eine m-dim. C^1-UMF von $\mathbb{R}^n$, $f: M \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und $\{\varphi_\alpha : V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m \to U_\alpha \subseteq M\}_{\alpha=1}^k$ lokale Parametrisierungen mit $\bigcup_\alpha U_\alpha \supseteq \mathrm{supp}(f)$. Ist $\{f_\alpha\}_{\alpha=1}^k$ eine $\{U_\alpha\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins von $\mathrm{supp}(f)$, dann definieren wir

$$\boxed{\int_M f(x)\,dS(x) := \sum_{j=1}^k \int_{U_j} f_j(x) f(x)\,dS(x)}$$

<u>Bemerkung:</u> man kann wieder zeigen, dass dies unabh. von der Parametrisierung ist.

Gauß'scher Integralsatz

Def.: Eine kompakte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ hat „glatten Rand", wenn es für jedes $a \in \partial A$ eine offene Umgebung U und $\alpha \in C^1(U, \mathbb{R})$ gibt, so dass

$$(i) \quad A \cap U = \{ x \in U \mid \alpha(x) \leq 0 \}$$

$$(ii) \quad \alpha'(x) \neq 0 \quad \forall x \in U.$$

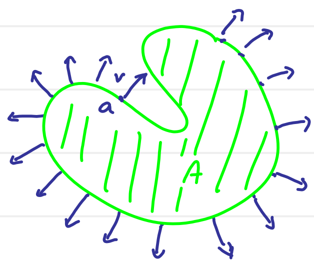
Bsp.: Vollkugel $A = B_R(0) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq R \}$ hat glatten Rand.
Wir können $\alpha(x) := \|x\|_2^2 - R^2$ wählen.

Satz: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand. Dann gilt:

1) ∂A ist eine $\underbrace{(n-1)\text{-dim. UMF von } \mathbb{R}^n}_{=: \text{„Hyperfläche"}}$;

2) Lokal kann ∂A (bis auf eine Permutation der Koordinaten) als Graph einer Funktion $f \in C^1(V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ dargestellt werden.

3) es gibt ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld $v \in C(\partial A, S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n)$ mit
(i) $\forall a \in \partial A: v(a) \in N_a \partial A$
(ii) $\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta \in (0, \varepsilon): a + \delta v(a) \notin A$



(**Def.:** Wir nennen v „äußeres Normalenfeld")

(iii) Ist $\partial A \cap U = \{ (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \cap U \mid x_n = f(x') \}$

dann gilt $$\boxed{v(x', x_n) = \frac{(-\nabla f(x')^T, 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x')\|^2}}} \quad \forall (x', x_n) \in \partial A \cap U$$

Beweis: 2) folgt aus 1).