TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2013W

Wintersem. 2013/14
Blatt 14
(30.1.2014)

Tutoraufgaben

T14.1. Parallelogrammgleichung und Polarisationsidentität

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. Dann gilt für alle $\phi, \psi \in \mathcal{H}$:

(a) $\|\phi + \psi\|^2 + \|\phi - \psi\|^2 = 2\|\phi\|^2 + 2\|\psi\|^2$ (Parallelogrammgleichung)

(b) $\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{4}\big(\|\phi+\psi\|^2 - \|-\phi+\psi\|^2 + i\|i\phi+\psi\|^2 - i\|-i\phi+\psi\|^2\big)$ (Polarisationsidentität)

T14.2. Konvergenz im Prähilbertraum

Sei (x_n) eine orthogonale Folge in einem Prähilbertraum $\mathcal{H}$, d.h. $\langle x_n, x_m \rangle = 0$ für $n \neq m$.

(a) Zeigen Sie: Ist die Folge (x_n) konvergent, so ist ihr Grenzwert 0.

(b) Zeigen Sie: Ist (x_n) orthonormal, so ist (x_n) nicht konvergent.

(c) Geben Sie konkret eine orthogonale Folge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to 0$ an.

T14.3. Eine Orthonormalbasis des $L^2([0, 2\pi])$

Zeigen Sie, dass die Funktionen $e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikt}$, $k \in \mathbb{Z}$, eine Orthonormalbasis des $L^2([0, 2\pi])$ bilden. Welche Identität aus der Analysis I beweist die Vollständigkeit?

Aufgaben

1. Volumenberechnung

Berechnen Sie das Volumen der Menge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } y^2 + z^2 \leq 1\}$.
HINWEIS: Integrieren Sie die z-Variable als letztes aus.

2. Zirkulation eines Vektorfeldes

Es bezeichne $K_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - a| \leq r\}$ die Kreisscheibe mit Radius r um den Punkt $a \in \mathbb{R}^2$. Sei nun $M := K_7(0,0) \setminus (K_2(0,-4) \cup K_1(0,0) \cup K_1(-3,3) \cup K_1(3,3))$. Berechnen Sie das Wegintegral des Vektorfeldes

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 2y + x^2 \sin(x) \\ \tanh(y) + 3x \end{pmatrix}$$

entlang des positiv orientierten Randes von M.

3. Residuen

Gegeben ist die Funktion $f(z) = \frac{z}{\sin z \cos z}$.

(a) Geben Sie alle Singularitäten von f an und klassifizieren Sie diese.

(b) Bestimmen Sie die Werte aller Residuen von f.

(c) Berechnen Sie $\int_{|z-\pi|=4} f(z) \mathrm{d}z$.

(d) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Laurent-Reihe von f im Entwicklungspunkt 0?

4. Fouriertransformation

Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f(x) = \frac{1}{(x+i)^2}$ und das Integral $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$.

Abgabe der Aufgaben: Freitag 7.2.2014, bis 17:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude
Die Aufgaben werden nicht korrigiert sondern gegebenenfalls als sinnvoll bearbeitet gewertet.