Tutoraufgaben

T11.1. Stetigkeit von Maßen

Sei $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra, $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ ein Maß und $A_j \in \Sigma$ für $j \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \implies \lim\limits_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu\Big(\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} A_j\Big)$.

(b) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$ und $\mu(A_1) < \infty \implies \lim\limits_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu\Big(\bigcap\limits_{j=0}^{\infty} A_j\Big)$.

T11.2. Lebesgue-Integral und Riemann-Integral

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}_0^+$ stetig differenzierbar, $f' < 0$ und $f(1) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $F(y) := \mu(\{x \in [0,1] \,|\, f(x) > y\})$ für $y \in [0, f(0)]$ die Umkehrfunktion von f ist.

(b) Beweisen Sie elementar, dass $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty F(y)\mathrm{d}y$.

T11.3. Beispiele und Gegenbeispiele zur majorisierten Konvergenz

(a) Sei $f(z) = \frac{e^{ikz}}{z}$, $k > 0$ und $\gamma_r(t) = r\,e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Zeigen Sie $\lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

(b) Geben Sie eine monoton fallende Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ an, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, d.h., für die $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \geq 0$ gilt, aber
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty f_n(x)dx \neq \int\limits_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

(c) Geben Sie eine Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\int\limits_0^\infty f_n(x)dx = 1$ an, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. Ist das ein Widerspruch zur majorisierten Konvergenz?

Hausaufgaben

H11.1. Vertauschen von Summe und Integral

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Zeigen Sie mit Hilfe der Konvergenzsätze aus der Vorlesung:

(a) Seien $g_n : \Omega \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, messbar. Dann gilt $\int\limits_\Omega \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n \mathrm{d}\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_\Omega g_n \mathrm{d}\mu$.

(b) Seien $g_n : \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, messbar und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_\Omega |g_n| \mathrm{d}\mu < \infty$. Dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ fast überall absolut konvergent und $\int\limits_\Omega \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n \mathrm{d}\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_\Omega g_n \mathrm{d}\mu$.

H11.2. Majorisierte Konvergenz für Reihen

Wir betrachten $\mathbb{N}_0$ mit dem Zählmaß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \to [0, \infty]$, $\mu(\{n\}) = 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Was besagt der Satz von der majorisierten Konvergenz bezüglich des Zählmaßes für Folgen in $\mathbb{C}$?

(b) Beweisen Sie den Satz von der majorisierten Konvergenz für Reihen elementar.

(c) Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n = e^z$ für $z \in \mathbb{C}$. Hinweis: Benutzen Sie, dass bei festem k die Folge $\binom{n}{k} \frac{|z|^k}{n^k}$ für $n \to \infty$ monoton gegen $\frac{|z|^k}{k!}$ konvergiert.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 20.1.2014, bis 12:15, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude

Anmeldung zur Modulprüfung noch bis 15.1.2013!