



Tutoraufgaben

T9.1. Residuen

Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen:

(a) $\pi \cot(\pi z)$, (b) $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$, (c) $\frac{1}{(z^2+1)^2}$.

T9.2. Anwendung des Residuensatzes

Berechnen Sie $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{b+\sin t}$ für $b > 1$. HINWEIS: Man schreibe das Integral als komplexes Kurvenintegral mit holomorphem Integranden entlang der Kurve $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

T9.3. Residuen von Einheitswurzeln

- (a) Für $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, zeige man $\text{Res}_{z_0} \left(\frac{f(z)}{z^n - c} \right) = \frac{z_0 f(z_0)}{nc}$, falls $f(z)$ bei z_0 holomorph und z_0 eine Nullstelle des Nenners ist.
- (b) Geben Sie alle Residuen von $\frac{1}{1+z^{2n}}$ an.
- (c) Bestimmen Sie $\oint_{\partial G} \frac{dz}{1+z^{2n}}$, wobei $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, \text{Im}(z) > 0\}$ und $R > 1$?
- (d) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$.

Hausaufgaben

H9.1. Residuen

Geben Sie jeweils alle Residuen an (in (e) ist $n \in \mathbb{Z}$):

(a) $\frac{e^{-z^2}}{z-2}$, (b) $\frac{1}{(z^2+1)^3}$, (c) $\frac{\sin^2 z}{z^5}$, (d) $z^n e^{\frac{1}{z}}$ (e) $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z(1-z)}$

HINWEIS: Betrachten Sie für (e) ein Wegintegral um den Ursprung und entwickeln Sie $\frac{1}{1-z}$ um auf (d) zurückzuführen.

H9.2. Berechnung von Integralen

Zeigen Sie:

(a) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2p \cos t + p^2} = \frac{2\pi}{1-p^2}$ für alle $p \in \mathbb{C}$ mit $|p| < 1$ HINWEIS: Wie in T9.2

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$ HINWEIS: Wie in T9.3