



Tutoraufgaben

T8.1. Anwendung des Satzes von Liouville

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Man zeige $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$, d.h. das Bild von f liegt dicht in \mathbb{C} . Man gebe ein Beispiel mit $f(\mathbb{C}) \neq \mathbb{C}$.

HINWEIS: Unter der Annahme $a \notin \overline{f(\mathbb{C})}$ betrachte man $z \mapsto \frac{1}{f(z)-a}$.

T8.2. Anwendungen des Identitätssatzes

Wieviele im Ursprung holomorphe Funktionen f gibt es, für die jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a) f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2-2}, \quad (b) f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \frac{1}{n}, \quad (c) f(\pi n) = 0, \quad (d) f^{(n)}(0) = (n!)^2.$$

T8.3. Laurentreihenentwicklungen I

Bestimmen Sie alle möglichen Laurent-Entwicklungen von $\frac{2+z}{z-z^3}$ auf Kreisringen mit den Mittelpunkten 0, 1 und -1 .

Hausaufgaben

H8.1. Laurentreihenentwicklungen II

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklungen einschließlich Konvergenzbereich auf punktierten Kreisscheiben um die isolierten Singularitäten von

$$(a) f(z) = \frac{e^z}{(z+2)^3}, \quad (b) f(z) = \frac{\sin z - z}{z^3}, \quad (c) f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z}, \quad (d) f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

H8.2. Die Besselfunktionen

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ besitzt die Funktion $f_z(w) = e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})}$ auf $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Laurentreihenentwicklung

$$e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) w^n$$

$J_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt die n -te Besselfunktion. Man zeige

$$(a) \text{ Für } n \geq 0 \text{ ist } J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}.$$

$$(b) J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(z \sin t - nt) dt.$$

HINWEIS: Man benutze die Integraldarstellung der Laurentkoeffizienten; in (a) durch geeignetes Einsetzen von Exponentialreihen; in (b) durch Auswerten entlang der Einheitskreislinie.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 16.12.2013, bis 12:15, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude