Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

Wintersem. 2013/14
Blatt 2
(24.10.2013)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2013W

Tutoraufgaben

T2.1. Gegenbeispiel zu Fubini

Sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{für } 0 < y < x, \\ -\frac{1}{y^2} & \text{für } 0 < x < y, \\ 0 & \text{für } x = y,\, xy = 0. \end{cases}$

(a) Berechnen Sie das Doppelintegral von f auf $[0,1]^2$ für beide Integrationsreihenfolgen.

(b) Was bedeutet dies für das uneigentliche Riemann-Integral von f auf $[0,1]^2$.

(c) Veranschaulichen Sie das Ergebnis, in dem Sie das Integral von $f_\pm \geq 0$ auf $[0,1]^2$ berechnen.

T2.2. Leibnizsche Sektorenformel in Polarkoordinaten I

Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine in Polarkoordinaten gegebene geschlossene Kurve um den Ursprung, d.h., $\binom{\gamma_1}{\gamma_2}(\phi) = \binom{r(\phi)\cos\phi}{r(\phi)\sin\phi}$, mit $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ stetig differenzierbar und $r(0) = r(2\pi)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von γ eingeschlossenen Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Hilfe der Transformation $g(\rho, \phi) = \binom{\rho\cos\phi}{\rho\sin\phi}$ für (ρ, ϕ).

T2.3. Das Volumen der vierdimensionalen Kugel

Berechnen Sie das Volumen der vierdimensionalen Einheitskugel.
Hinweis: Polarkoordinaten jeweils für zwei Koordinatenpaare.

Hausaufgaben

H2.1. Uneigentliche Integrale

(a) Berechnen Sie das Integral von $f(x,y) = e^{-y^2}$ auf der Menge $A = \{0 \leq x \leq y\}$.

(b) Für welche Werte von $\alpha > 0$ existiert für $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$, das Integral über die Einheitskugel, $\int\limits_{\|x\|\leq 1} f(x) \mathrm{d}^d x$, $d = 1, 2, 3$?

H2.2. Leibnizsche Sektorenformel in Polarkoordinaten II

Wie in T2.2 sei $\gamma(\phi) = \binom{r(\phi)\cos\phi}{r(\phi)\sin\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi]$, mit $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ stetig differenzierbar und $r(0) = r(2\pi)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von γ eingeschlossenen Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$, hier mit Hilfe der Transformation $g(\rho, \phi) = \rho\gamma(\phi)$ für $(\rho, \phi) \in A := [0,1] \times [0, 2\pi]$.

H2.3. Das Volumen der d-dimensionalen Kugel

Sei $V_d(R) := \mathrm{vol}(\{x \in \mathbb{R}^d \,|\, \|x\| \leq R\})$, das Volumen der d–dimensionalen Kugel mit Radius R, $V_0(R) := 1$. Wegen der Skalierung des Volumens gilt $V_d(R) = v_d R^d$, wobei v_d das Volumen der d–dimensionalen Einheitskugel ist.

(a) Berechnen Sie v_d bei bekanntem v_{d-2}.

(b) Für die Gammafunktion gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ für $x > 0$. Zeigen Sie $v_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$. Für welches d ist v_d maximal?

Hausaufgabenabgabe: Montag, 4.11.2013, bis 12:15, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude