Mathematik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 14

Notiztitel 31.01.2013

Hilberträume

1. Skalarprodukt für (komplexe) Hilberträume

$v, w \in \mathcal{H}$ Hilbertraum

$(v,w) \mapsto \langle v,w \rangle$ ist • linear im zweiten Argument

$\langle v, \lambda w + \mu w' \rangle = \lambda \langle v,w \rangle + \mu \langle v,w' \rangle$

• antilinear im ersten Argument

$\langle \lambda v + \mu v', w \rangle = \bar{\lambda} \langle v,w \rangle + \bar{\mu} \langle v',w \rangle$ (wg. $\langle v,w \rangle = \overline{\langle w,v \rangle}$)

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Bsp.: $\mathbb{C}^2 \ni v,w$: $\langle v,w \rangle = \bar{v}_1 w_1 + \bar{v}_2 w_2$

ONB ist z.B. $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ (= algebraische Basis, da endl. dim.)

Bedeutung des Skalarprodukts: Winkel plus Phase

Seien b_1, b_2 orthonormal

• $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$ d.h. $b_1 \perp b_2$, b_1, b_2 stehen senkrecht aufeinander (Winkel 90°)

Mit Phase $\langle e^{i\varphi} b_1, e^{i\psi} b_2 \rangle = e^{i(\psi - \varphi)} \langle b_1, b_2 \rangle = 0$

• $\langle b_1, b_1 \rangle = 1$, d.h. (da $\|b_1\| = 1$), dass $b_1 \| b_1$ kollinear (Winkel 0°)

mit Phase $\langle b_1, e^{i\varphi} b_1 \rangle = e^{i\varphi}$ Betrag 1, d.h. $b_1 \| e^{i\varphi} b_1$ (Winkel 0°)

- $v = \cos\alpha\, b_1 + \sin\alpha\, b_2$, $\|v\| = 1$, $\alpha \in [0,\pi]$

$\langle b_1, v\rangle = \langle b_1, \cos\alpha\, b_1 + \sin\alpha\, b_2\rangle = \cos\alpha$

$\Rightarrow \measuredangle(b_1, v) = \alpha$, Phase 0

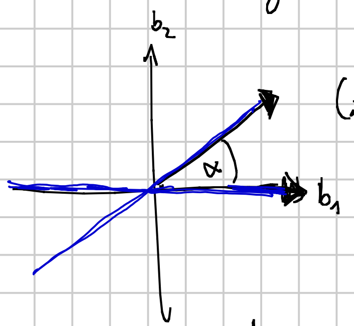
- $v = e^{i\varphi}\cos\alpha\, b_1 + e^{i\psi}\sin\alpha\, b_2$, $\|v\| = 1$

$\langle b_1, v\rangle = \langle b_1, e^{i\varphi}\cos\alpha\, b_1 + e^{i\psi}\sin\alpha\, b_2\rangle = e^{i\varphi}\cos\alpha$

Betrag $\cos\alpha$ d.h. $\measuredangle(b_1, v) = \alpha$ Phase φ

Fazit $v, w \in \mathcal{H}$: • $\arccos \underbrace{\frac{|\langle v,w\rangle|}{\|v\|\,\|w\|}}_{\text{Betrag} \leq 1 \text{ Cauchy-Schwarz}}$ ist der Winkel zwischen ... (*) v und w.

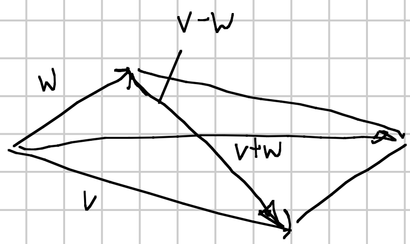
• $\arg\langle v,w\rangle$ ist die relative Phase zwischen v und w



(*) Winkel zwischen den von v und w aufgespannten eindim. Unterräumen.

Parallelogrammgleichung und Polarisationsidentität

$\mathcal{H}$ (Prä-)Hilbertraum, $v, w \in \mathcal{H}$



Satz: (Parallelogrammgleichung)

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

Beweis $\langle v+w, v+w\rangle + \langle v-w, v-w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle$

$+ \langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle$

Satz: $\langle v,w\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\lambda^4=1} \lambda \|\lambda v + w\|^2$

$$= \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 + i\|iv+w\|^2 - \|-v+w\|^2 - i\|-iv+w\|^2\right.$$

Beweis: $\|v+w\|^2 - \|-v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle - \langle -v+w, -v+w\rangle$

$$= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle$$

$$-\langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle - \langle w,w\rangle = 2\langle v,w\rangle + 2\langle w,v\rangle \quad (1.,3.\text{Term})$$

$$i\langle iv+w, iv+w\rangle - i\langle -iv+w, -iv+w\rangle =$$

$$= i\langle iv,iv\rangle + i\langle iv,w\rangle + i\langle w,iv\rangle + i\langle w,w\rangle$$

$$-i\langle -iv,-iv\rangle - i\langle -iv,w\rangle - i\langle w,-iv\rangle - i\langle w,w\rangle = 2\langle v,w\rangle - 2\langle w,v\rangle \quad (2.,4.\text{Term})$$

Summe ergibt $4\langle v,w\rangle$ $\square$

Bem: Sei V ein normierter $\mathbb{C}$-Vektorraum.
Erfüllt die Norm die Parallelogrammgleichung, so definiert

$$\langle v,w\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\lambda^4=1} \lambda\|\lambda v+w\|^2$$

ein Skalarprodukt auf V. D.h. V ist damit ein Prähilbertraum.

Unterschied Prähilbertraum - Hilbertraum

- Jeder (komplexe) Vektorraum $\mathcal{H}$ mit Skalarprodukt ist Prähilbertraum
- Ist $\mathcal{H}$ vollst. bzgl. der vom Skalarprodukt induzierten Norm, so ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

Bsp: $\ell^2 := L^2(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$ mit $\langle a,b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n}\, b_n$

ist Hilbertraum mit ONB $e_k \in \ell^2$ $(e_k)_n = \delta_{nk}$, d.h. $e_k = (0,\dots,0,\underset{\uparrow\ k\text{-te Stelle}}{1},0,\dots)$

- $\mathrm{span}\{e_k \mid k\in\mathbb{N}\}$ ist <u>kein</u> Hilbertraum, sondern nur Prähilbertraum.

<u>Beweis:</u> $\mathrm{span}\{e_h \mid h\in\mathbb{N}\} := \left\{ v\in \ell^2 \;\middle|\; \text{es gibt } K\in\mathbb{N}, \alpha_1,\dots,\alpha_K\in\mathbb{C}, \text{ s.d. } v=\sum_{h=1}^{K}\alpha_h e_h \right\}$

nur endliche Linearkombinationen!!

(i) $\mathrm{span}\{e_h \mid h\in\mathbb{N}\} \subsetneq \ell^2$: z.B. $v=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots)\in\ell^2$, da $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$, aber $v\notin \mathrm{span}\{e_h \mid h\in\mathbb{N}\}$

(ii) $\mathrm{span}\{e_h \mid h\in\mathbb{N}\}$ ist nicht abgeschlossen:

Setze $v^{(m)} := (1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{m},0,\dots)\in \mathrm{span}\{e_h \mid h\in\mathbb{N}\}$

$v^{(m)}$ ist Cauchyfolge (*)

Sei $m'>m>M\in\mathbb{N}$

$$\|v^{(m')}-v^{(m)}\|^2 = \|(0,\dots,0,\tfrac{1}{m+1},\tfrac{1}{m+2},\dots,\tfrac{1}{m'},0,\dots)\|^2 = \sum_{j=m+1}^{m'}\frac{1}{j^2} \leq$$

$$\leq \sum_{j=M}^{\infty}\frac{1}{j^2} \xrightarrow{M\to\infty} 0 \quad \text{unabh. von } m,m'. \quad \square$$

D.h. Der Grenzwert von $v^{(m)}$ liegt nicht im $\mathrm{span}\{e_h \mid h\in\mathbb{N}\}$

Aber es gilt $\ell^2 = \overline{\mathrm{span}\{e_h \mid h\in\mathbb{N}\}}$

(*) $v^{(m)}\in\mathcal{H}$ ist Cauchy-Folge $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\epsilon>0\,\exists M\in\mathbb{N}\,\forall m,n\geq M: \|v^{(m)}-v^{(n)}\|<\epsilon$

$\Leftrightarrow \lim_{M\to\infty}\sup\{\|v^{(m)}-v^{(n)}\| \mid m,n\geq M\} = 0$

<u>Bem:</u> ONB eines unendlich dim. separablen Hilbertraums $\mathcal{H}$ ist <u>keine</u> algebraische (Hamel-)Basis!
$\mathcal{H}$ besitzt (wie jeder VR eine (Hamel-)Basis, aber diese ist überabzählbar.

Konvergenz im Hilbertraum

$\mathcal{H}$ Hilbertraum, $v^{(k)} \in \mathcal{H}$ bel. Folge von Vektoren

Dann ist $v^{(1)} + v^{(2)} \in \mathcal{H}$

$v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)} \in \mathcal{H}$

$\vdots$

Was ist $\sum_{k=1}^{\infty} v^{(k)}$?

$\sum_{k=1}^{\infty} v^{(k)}$ ist derjenige Vektor $v \in \mathcal{H}$ für den gilt

$$\lim_{K\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{K} v^{(k)} - v \right\| = 0,$$ falls die Reihe konvergiert.

Ein hinreich. Kriterium ist, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \|v^{(k)}\| < \infty$, denn dann ist $\sum_{k=1}^{K} v^{(k)}$ Cauchy-Folge:

$$k' > k > K: \quad \left\| \sum_{j=k+1}^{k'} v^{(j)} \right\| \leq \sum_{j=k+1}^{k'} \|v^{(j)}\| \leq \sum_{j=K}^{\infty} \|v^{(j)}\| \xrightarrow{K\to\infty} 0$$

D.h. Im allgemeinen ist für normierte Vektoren $\|v^{(k)}\| = 1$ die Folg $\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k} v^{(k)}$ nicht konvergent

Lemma 1 Ist $(b^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ orthonormal und $(\alpha_k) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$. dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b^{(k)} \in \mathcal{H}$

Bew: $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k b^{(k)}$ ist Cauchy Folge: Sei $k' > k > K$

$$\left\| \sum_{j=1}^{k'} \alpha_j b^{(j)} - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j b^{(j)} \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=k+1}^{k'} \alpha_i b^{(i)}, \sum_{j=k+1}^{k'} \alpha_j b^{(j)} \right\rangle$$

$$= \sum_{i=k+1}^{k'} \sum_{j=k+1}^{k'} \overline{\alpha_i} \alpha_j \underbrace{\langle b^{(i)}, b^{(j)} \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{j=k+1}^{k'} |\alpha_j|^2 \leq \sum_{j=K}^{\infty} |\alpha_j|^2 \xrightarrow{K\to\infty} 0 \quad \square$$

Bsp. Ist $(b^{(n)})$ orthonormal, dann ist

$$1 b_1 + \frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{3} b_3 + \cdots \in \mathcal{H}$$