Mathematatik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 13

Notiztitel 22.01.2013

A 12.3 $\nabla g(x,t)$ statt $\nabla g(t)$

Dirac-Folgen Sei δ_h Dirac-Folge, d.h.

$$\delta_h \in L^1(\mathbb{R}^n),\ \delta_h \geq 0,\ \|\delta_h\|_1 = 1 \quad \text{und}$$

$$\lim_{h\to\infty} \int_{\|x\|>r} \delta_h(x)\,dx = 0 \quad \text{f.a. } r>0$$

(*) Dann gilt für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\|\delta_h * f - f\|_1 \xrightarrow{h\to\infty} 0$$

Beweisskizze. oE $f \geq 0$ (Betrachte $(\mathrm{Re}\, f)_\pm$, $(\mathrm{Im}\, f)_\pm$ getrennt)

Sei $\epsilon > 0$

Setze $\delta_h = \delta_h^{\leq r} + \delta_h^{>r}$ r zunächst beliebig >0

$$\delta_h^{\leq r}(x) := \chi_{\{\|x\|\leq r\}}(x)\,\delta_h(x),\quad \delta_h^{>r} := 1 - \delta_h^{\leq r}$$

Somit ist $1 = \|\delta_h\|_1 = \|\delta_h^{\leq r}\|_1 + \|\delta_h^{>r}\|_1$

$$\|\delta_h * f - f\|_1 = \left\|\left(\delta_h^{\leq r} + \delta_h^{>r}\right) * f - \left(\|\delta_h^{\leq r}\|_1 + \|\delta_h^{>r}\|_1\right) f\right\|_1$$

$$\leq \underbrace{\left\|\delta_h^{\leq r} * f - \|\delta_h^{\leq r}\|_1 f\right\|_1}_{I_{0,h}(r)} + \underbrace{\left\|\delta_h^{>r} * f - \|\delta_h^{>r}\|_1 f\right\|_1}_{I_{\infty,h}(r)}$$

$$I_{0,k}(r) \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy \; \delta_k^{\leq r}(y) \, |f(x-y) - f(x)|$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} dy \, \delta_k^{\leq r}(y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} dx \, |f(x-y) - f(x)|}_{=: F(y) \text{ ist stetig}, \; F(0) = 0}$$

(noch zu zeigen mit Approximation durch Treppenfkt.)

$$\leq \int_{\|y\| \leq r} dy \, \delta_k(y) \sup_{\|y\| \leq r} F(y) \leq \sup_{\|y\| \leq r} F(y) < \frac{\epsilon}{2} \text{ falls } r \text{ klein genug}$$

Wähle r so, dass $I_{0,k}(r) < \frac{\epsilon}{2}$

$$I_{\infty,k}(r) = \| \delta_k^{>r} * f - \|\delta_k^{>r}\|_1 f \|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy \; \delta_k^{>r}(y) \, |f(x-y) - f(x)|$$

$$\overset{\text{Fubini}}{\leq} \int_{\|y\| > r} dy \, \delta_k(y) \int_{\mathbb{R}^n} dx \, \left(|f(x-y)| + |f(x)| \right)$$

$$\leq \int_{\|y\| > r} dy \, \delta_k(y) \cdot 2 \|f\|_1 \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Wähle K so groß dass f.a. $k \geq K$ $I_{\infty,k}(r) < \frac{\epsilon}{2}$

$$\Rightarrow \| \delta_k * f - f \|_1 \leq I_{0,k}(r) + I_{\infty,k}(r) < \epsilon \qquad \blacksquare$$

(**) Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\lim_{k \to \infty} \int \delta_k(x) \varphi(x) \, dx = \varphi(0)$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. $\delta_k = \delta_k^{\leq r} + \delta_k^{>r}$

$$\left| \left(\int \delta_k(x) \varphi(x) \, dx \right) - \varphi(0) \right| = \left| \int \delta_k(x) \left(\varphi(x) - \varphi(0) \right) dx \right|$$

$$\leq \int \delta_k(x) \, |\varphi(x) - \varphi(0)| \, dx$$

$$\leq \underbrace{\int_{\|x\|\leq r} \delta_h(x)\,|\varphi(x)-\varphi(0)|\,dx}_{\leq \int_{\|x\|\leq r} \delta_h(x) \underbrace{\sup_{\|x\|\leq r}\|\varphi(x)-\varphi(0)\|}_{<\frac{\epsilon}{2} \text{ für } r \text{ klein genug}} dx} + \underbrace{\int_{\|x\|>r} \delta_h(x)\; 2\|\varphi\|_\infty\, dx}_{\xrightarrow{h\to\infty} 0 \text{ für jedes } r>0} < \epsilon \qquad \boxed{\text{n}}$$

(***) Vertauschen von Differentiation und Integration

Bem: Sei $f:]a,b[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(\lambda, x) \mapsto f_\lambda(x)$ mit

$f_\lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist in $L^1(\mathbb{R})$, nach λ stetig differenzierbar, so dass

$\partial_\lambda f_\lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $L^1(\mathbb{R})$ f.a. $\lambda \in]a,b[$ und

$|\partial_\lambda f_\lambda(\lambda, x)| \leq g(x)$ für alle λ und fast alle x, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

dann gilt

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\lambda f_\lambda(x)\,dx$$

Beweis $\frac{d}{d\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x)\,dx = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} \left(f_{\lambda+h}(x) - f_\lambda(x)\right) dx$

$$\left[\text{Es gilt } \left|\frac{1}{h}\left(f_{\lambda+h}(x) - f_\lambda(x)\right)\right| \overset{\text{MWS}}{\leq} \sup_{\mu\in[\lambda,\lambda+h]} |\partial_\lambda f_\mu(x)| \leq g(x) \right]$$

$\Rightarrow$ ← Majorisierte Kgz

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f_{\lambda+h}(x) - f_\lambda(x)\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\lambda f_\lambda(x)\,dx.$$

Für Dirac Folgen in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\delta_h * f)(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int \underbrace{\delta_h(x-y) f(y)}_{\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\delta_h(x-y) f(y)\right| \leq M f(y) \text{ Majorante}} dy \overset{\text{Maj Kgz}}{=} \int \frac{\partial}{\partial x_j}\delta_h(x-y) f(y)\,dy = \frac{\partial}{\partial x_j}\delta_h * f$$

Beispiele für temperierte Distributionen

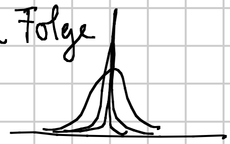
- $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow F_f[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx$. Dann ist

  $F_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ eine Distribution

  δ_h Dirac-Folge in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\delta_h * f$ approximierende Folge von F_f

- $F[\varphi] := \varphi(0)$ ist Distribution (δ-Distribution, von Dirac-Folgen approximiert)

- $F[\varphi] := \partial_j \varphi(0)$ ist Distribution ($-\partial_j \delta$, Abl. der Delta-Distr., Approximierende Folge



$x \in \mathbb{R}$ $\quad \delta_h(x) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$, $\delta_h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ approximieren δ

$-\delta_h'$ approximieren $-\delta'$

- $F[\varphi] := \int \varphi(x)\,dx$ ist Distr (entspricht der konstanten Funktion 1)

- $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Polynom. Dann ist

  $F_p[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^n} p(x)\,\varphi(x)\,dx$ Distribution

- $x \mapsto e^{x^2}$ entspricht keiner temperierten Distribution.

  $x \mapsto e^{x}$ " " " "