Mathematik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 11

Notiztitel 08.01.2013

HA10.1(b) Fehler: $\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu = \sum_{j=1}^{k} (a_j - \cancel{a_{j-1}})\, \mu(f^{-1}(\{a_j\}))$

- $f: \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ Borel-messbar mit $F(t) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > t\})$

  Dann ist $\int_{(\mathbb{R}^n)} f(x)\, d^n x := \int_0^\infty F(t)\, dt \in [0,\infty]$

  das Lebesgue-Integral von f

- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-messbar und $\int |f(x)|\, dx < \infty$, dann ist

  $$\int f(x)\, d^n x = \int f_+\, d\mu - \int f_-\, d\mu$$

- Ist $f = g$ f.ü. so ist (falls definiert)

  $$\int f(x)\, d^n x = \int g(x)\, d^n x$$

- Ist $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uneigentlich (absolut) Riemann integrierbar, dann ist f Lebesgue-integrierbar, und es gilt für jede den $\mathbb{R}^n$ ausschöpfende Folge A_n

  $$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{A_n} f(x)\, d^n x}_{\text{eigentl. Riemann}} = \underbrace{\int f(x)\, d^n x}_{\text{Lebesgue}}$$

Bem 1. Der dichte Kamm: $f = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ ist nicht Riemann-integrierbar (weder eigentl. noch uneigentl.), da nirgends auf $[0,1]$ stetig.

aber $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} = 0$ f.ü., also Lebesgue-integrierbar, da messbar:

$t \geq 1$ $\quad \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > t\} = \emptyset$ messbar,

$0 \leq t < 1$ $\quad \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > t\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, Nullmenge also messbar,

$t < 0$ $\quad \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > t\} = \mathbb{R}$ messbar.

Es gilt also

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)\,dx = \int 0\,dx = 0 \quad !$$

2. Das Lebesgue- wie das Riemann-Integral einer nichtnegativen Funktion f misst das Volumen zwischen den Graphen von f und der Nullfunktion.

3. Fubini und Transformationssatz gelten für Lebesgue (sogar mit schwächeren Voraussetzungen)

4. Majorisierte Konvergenz. Typische Anwendung:

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ konvergiere punktweise gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Ist $|f_n| \leq g$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ integrierbar, dann gilt

$$\int f_n(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int f(x)\,dx$$

z.B. Alle f_n stetig, $|f_n(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$, $C > 0$

L^p-Räume

$L^p(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) / \sim_{f.ü}$. $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ messbar} \mid \int |f(x)|^p dx < \infty \}$

$\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$ bedeutet z.B. für $\tilde{f} = \tilde{0}$

$\tilde{f} = \{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid g = 0 \text{ f.ü} \}$

d.h. $0 \in \tilde{f}$, aber auch $\chi_{\mathbb{Q}} \in \tilde{f}$

Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ Nullmenge, dann ist $\chi_A \in \tilde{f}$

Aber in $\tilde{f}$ gibt es nur eine stetige Funktion, nämlich die Nullfunktion.

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ schreibt man daher $f \in L^p(\mathbb{R})$ wobei f für die Äquivalenzklasse $\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid g = f \text{ f.ü.} \}$ steht.

Fourierreihen (Wdh.)

Def: Für $f \in L^1([-\pi,\pi])$ ist die Fourierreihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$ definiert mittels

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} e^{-ikx} f(x)\,dx \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

z.B. für $f \in C^1(\mathbb{R})$ 2π-periodisch gilt $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$ pktweise.

Elementare Eigenschaften

(i) $\widehat{f+\alpha g} = \hat{f} + \alpha \hat{g}$ (linear)

(ii) $g(x) = f(x-h) \Rightarrow \hat{g}(k) = e^{-ikh} \hat{f}(k)$

(iii) $g(x) = e^{ihx} f(x), h \in \mathbb{Z} \Rightarrow \hat{g}(k) = \hat{f}(k-h)$

(iv) Skalierungsinvarianz?

Zusammenhang Fourier-Reihen und Fouriertransformation

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-periodisch, $f|_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]} \in L^1([-\frac{T}{2},\frac{T}{2}])$

Mit $c_k = \frac{1}{T} \int_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]} f(t) e^{-i\omega_k t} dt$, $\omega_k = \frac{2\pi}{T} k$, $k \in \mathbb{Z}$, ist wieder

$$f(t) \overset{*}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i\omega_k t}$$

($\overset{*}{=}$ falls z.B. die Summe glm. abs. kgt, oder wenn f stetig diff)

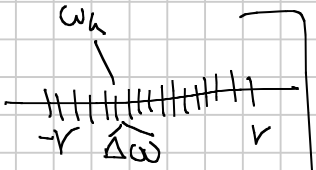
$\boxed{\text{Bem: } T = 2\pi \Rightarrow c_k = \hat{f}(k).}$ $\qquad\qquad \underline{\underline{\omega_k = \frac{2\pi}{T} k}}$

Mit $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ ist

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} e^{i\omega_k t} \underbrace{\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(s) e^{-i\omega_k s} \, ds \right)}_{\frac{1}{2\pi} \int f(s) e^{-i\omega_k s} ds}}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\omega_k) \text{ Fouriertransf.}} \Delta\omega$$

$T \to \infty$, also $\Delta\omega \to 0$

wähle n, so dass $\frac{n}{T} \approx \frac{1}{\pi} r > 0$



$$f(t) = \underbrace{\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} e^{i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\omega) \, d\omega}_{\text{Fourier-Rücktransformation}}$$

Dies ist nur Illustration, da diverse Limites ohne Rücksicht auf Reihenfolge durchgeführt wurden. Kann aber präzisiert werden.