Mathematatik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 1

Notiztitel 04.12.2012

Identitätssatz $f, g: U \to \mathbb{C}$ holomorph

$$f = g \iff \begin{cases} f(z) = g(z) \text{ für } z \in B_\epsilon(z_0) \subseteq U \\ f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0,\ z_0 \in U \\ f(z_n) = g(z_n) \text{ für } z_n \to z_0 \in U \end{cases}$$

Anwendungen: Gibt es bei 0 holomorphe Funktion f mit

(a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ ja $f(z) = z$ eindeutig

(b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$ ja $f(z) = z^2$ " "

(c) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ nein, sonst wäre $f'(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$

(d) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{|n|}$ $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. nein, denn für $n > 0$ muss $f(z) = z$ gewählt werden

aber dann $f(-1) = -1 \neq 1 = \frac{1}{|-1|}$

Bsp: • $f(z) = \sin \pi z$, $g(z) = 0$

$f(n) = g(n)$ für $n \in \mathbb{Z}$ Aber $\mathbb{Z}$ hat keinen HP

• $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$, $g(z) = 0$

$f(z) = g(z)$ für $z \in \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$. Häufungspunkt 0

aber f in 0 nicht holomorph fortsetzbar

Isolierte Singularitäten: $z_0 \in U \subseteq \mathbb{C}$ offen

Ist $f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph (z_0 ist isolierte Singularität),
dann ist in z_0 entweder

- eine hebbare Singularität, $f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z-z_0)^k$

oder

- ein Pol n-ter Ordnung, $f(z) = \sum_{k \geq -n} c_k (z-z_0)^k$, $c_{-n} \neq 0$

oder

- wesentliche Singularität, $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z-z_0)$, $\forall N \in \mathbb{N}\, \exists n \geq N: c_{-n} \neq 0$

Insbesondere: Ist in z_0 isolierte Singularität von f, dann hat f in z_0 die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n \quad \text{wobei} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

und $\sum_{n \geq 1} c_{-n} w^n$ hat Konvergenzradius ∞.

$\left(\sum_{n \geq 1} c_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n} \text{ konvergiert auf } \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \right)$

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n \geq 0} c_n (z-z_0)^n}_{\text{Nebenteil Kgz. R}}$$

$HT: \sum_{n \geq 1} c_{-n} \left(\frac{1}{z-z_0}\right)^n$

Kgz für $|z-z_0| > r$

Ist der Hauptteil gleich Null, so ist bei z_0 eine hebbare Singularität.
Ist der Hauptteil eine endliche Summe, liegt ein Pol vor.
Hat der Hauptteil unendl. viele Terme, so ist bei z_0 eine wesentliche Singularität.

Bsp: $f(z) = \frac{z}{\sin z}$ hebbare Singularität da $\frac{\sin z}{z} \xrightarrow{|z|\to 0} 1$

$$f(z) = \frac{z}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \cdots} = \frac{1}{1-\left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} \pm \cdots\right)} = \qquad \boxed{\frac{z - \frac{z^3}{3!} \pm \cdots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} \pm \cdots \to 1}$$

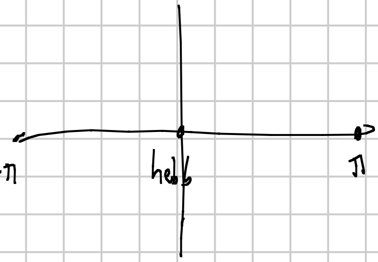
$$= 1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} \pm \cdots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} \pm \cdots\right)^2 + \left(\frac{z^2}{3!} \mp \cdots\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + \frac{z^4}{36} + \cdots = 1 + \frac{z^2}{6} + \frac{7}{360} z^4 \pm \cdots = \sum_{n\geq 0} a_{2n} z^{2n}$$

Konvergenzradius? Was ist $\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$

Pole bei $\pm\pi$, holomorph auf $B_\pi(0)$

$\Rightarrow$ Kgzr. ist π



- $ze^{1/z}$ definiert auf $\mathbb{C}^\times$. Wesentliche Singularität bei 0

$$ze^{1/z} = z \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \underbrace{z + 1}_{\text{Nebenteil}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{6}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^3} + \cdots}_{\text{Hauptteil}}$$

Partialbruchzerlegung (andere Perspektive)

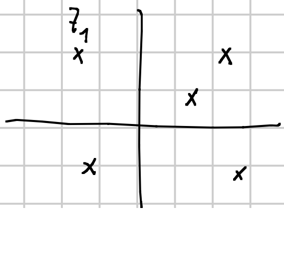
$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, p, q Polynome ohne gemeinsame Nullst., $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$

$q(z) = \alpha (z - z_1)^{n_1} \cdots (z - z_h)^{n_h}$, $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ $z_1, \dots, z_h$ p.V.

z_j ist n_j-fache Nullstelle von q

mit HA: $\frac{p(z)}{q(z)}$ besitzt bei z_j Pol der Ordnung n_j, d.h.

einen Hauptteil bei z_j $H_j(z) = \sum_{l=1}^{n_j} c_{-l} (z - z_j)^{-l}$



$$\Rightarrow g(z) = \frac{p(z)}{q(z)} - \sum_{j=1}^{k} H_j(z)$$ hat hebbare Singularitäten bei z_j

kann also zu einer ganzen Funktion fortgesetzt werden.

$$\lim_{|z|\to\infty} |g(z)| = \lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| = 0 \quad \Rightarrow g \text{ ist beschränkt}$$

$$\overset{\text{Liouville}}{\Longrightarrow} \quad g(z) = 0 \quad \text{d.h.}$$

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{j=1}^{k} H_j(z)$$

Wie bestimmt man Hauptteile?

$f(z)$ hab einen n-fachen Pol bei z_0, d.h.

$$\underbrace{(z-z_0)^n f(z)}_{\text{hebb. Sing. bei } z_0} = \sum_{k\geq 0} c_k (z-z_0)^k =: g(z)$$

Somit ist
$$f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k (z-z_0)^{k-n} = \underbrace{\frac{c_0}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{c_{n-1}}{z-z_0}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{c_n + c_{n+1}(z-z_0) + \dots}_{\text{Nebenteil}}$$

$$c_0 = g(z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z)$$

$$c_1 = g'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left((z-z_0)^n f(z)\right)$$

$$c_2 = \frac{g''(z_0)}{2!} = \frac{1}{2!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^2}{dz^2}\left((z-z_0)^n f(z)\right)$$

$\vdots$

Insbesondere $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ einfacher Pol bei z_0, d.h.

$$q(z) = \alpha (z-z_0) \prod_{j=1}^{k} (z-z_j), \quad z_j \neq 0$$

Hauptteil von f in z_0 ist $\frac{c}{z-z_0}$,

$$c = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{\alpha \prod_{j=1}^{k} (z-z_j)} = \frac{p(z_0)}{\alpha \prod_{j=1}^{k} (z_0 - z_j)}.$$

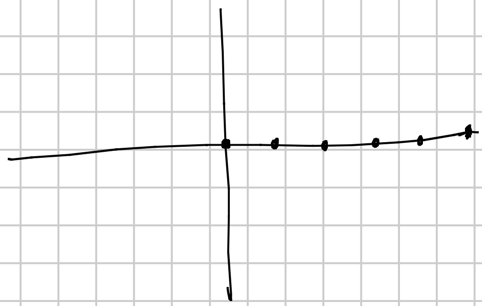
Bsp.: $$\frac{p(z)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} = \frac{1}{z-z_1} \frac{p(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} + \frac{1}{z-z_2} \frac{p(z_2)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)} + \frac{1}{z-z_3} \frac{p(z_3)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}$$

- Verallgemeinerte Binomialkoeffizient, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{z}{n} := \frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n!}$$

Für $z \in \{0, \dots, n\}$ gilt $\binom{z}{n} = \frac{z!}{n!(z-n)!}$

Nullstellen bei $z_j = j$, $j = 0, \dots, n-1$



Also $$\frac{1}{\binom{z}{n}} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \frac{1}{z-j}.$$

PBZ Zählergrad $\geq$ Nennergrad, Nullst. von q $z_1, \dots z_k$

$p(z_j) \neq 0$

$$\frac{p(z)}{q(z)} - \sum_{j=1}^{k} H_j(z) = \underbrace{g(z)}_{\text{ganze Fkt}} = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$$

$m = \text{grad}\, p - \text{grad}\, q \geq 0$. Dann ist

$$\lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{g(z)}{z^{m+1}} \right| = \lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{1}{z^{m+1}} \frac{p(z)}{q(z)} \right| = 0 \Rightarrow c_n = 0 \text{ für } n \geq m+1$$

d.h. $g(z)$ ist Polynom vom Grad m.

Bsp: $\dfrac{z^5}{(z-1)^2(z-2)} = \dfrac{a_1}{(z-1)^2} + \dfrac{a_2}{z-1} + \dfrac{a_3}{z-2} + a_4 + a_5 z + a_6 z^2$

z.B. Maple > convert (z^5 / (z-1)^2 / (z-2), parfrac);

$$z^2 + 4z + 11 + \frac{32}{z-2} - \frac{6}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2}$$