Mathematik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 6

Notiztitel 20.11.2012

Wdh.: Integralsätze

HDI: $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f \in C^1(U,\mathbb{R})$, $[a,b] \subseteq U$:

$$\int_{[a,b]} f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

Wegintegral: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ $\gamma : [t_0, t_1] \to U$ Kurve mit $\gamma(t_0) = a$, $\gamma(t_1) = b$

$$\int_\gamma \nabla f \cdot dr = f(b) - f(a)$$

Satz von Gauß: $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $F \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$, $A \subseteq U$ kompakt mit glattem Rand:

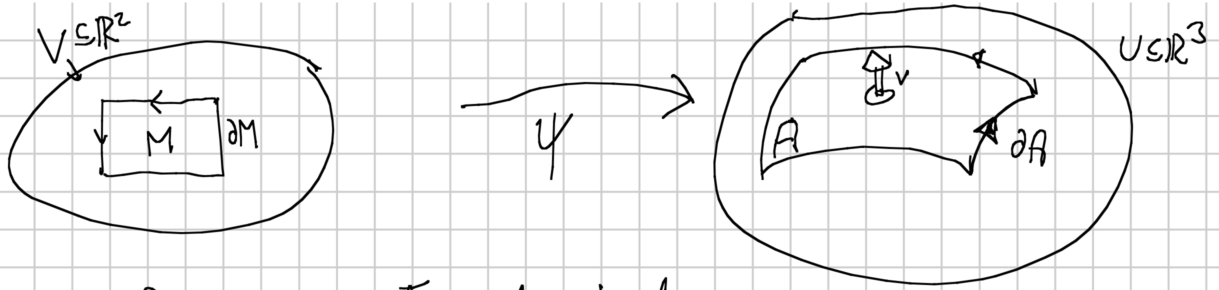
$$\int_A \operatorname{div} F(x)\,d^n x = \int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle\, dS$$

Satz von Stokes: $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $F \in C^1(U,\mathbb{R}^3)$. $A \subseteq U$ Flächenstück mit (orientiertem) Rand, d.h. $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \psi(V) \subseteq U$ ist C^1-Diffeom (V offen)

$M \subseteq V$ Normalbereich (insbes. kp) und $A = \psi(M)$, $\partial A = \psi(\partial M)$

$$\int_A \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle\, dS = \oint_{\partial A} F \cdot dr$$

(wobei ν durch die Parametrisierung ψ gegeben ist $\left(\nu = \frac{\partial_1 \psi \times \partial_2 \psi}{\|\partial_1 \psi \times \partial_2 \psi\|}\right)$ und ∂A so durchlaufen wird, dass ∂M gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist



Erinnerung: Der Fluss von F durch ein als $A = \psi(M)$ parametrisiertes Flächenstück ist

$$\int_A \langle F, \nu \rangle \, dS = \int_M \langle F(\psi(u)), \partial_1 \psi(u) \times \partial_2 \psi(u) \rangle \, d^2 u$$

da $\sqrt{\det \psi'^T \psi'} = \| \partial_1 \psi \times \partial_2 \psi \|$

Umkehrung der Ableitung

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$

- Wann gibt es f mit $\nabla f = F$?

  wenn F' symmetrisch ist $(n=3: \operatorname{rot} F = 0)$ und U sternförmig (einf. zush. reicht)

  eindeutig, bis auf Konstante: $f(a) = \int_{\gamma: 0 \to a} F(r) \, dr$

- $\rho \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$

  Wann gibt es ein F mit $\operatorname{div} F = \rho$?

  z.B. wenn $U = \mathbb{R}^3$, ρ mit kompakten Träger

  $$F(x) = \int_{\operatorname{supp} \rho} \frac{\rho(y) \, (y-x)}{\|y-x\|^3} \, d^3 y, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

  eindeutig bis auf divergenzfreies Vektorfeld.

  Wann gibt es G mit $\operatorname{rot} G = F$?

  z.B. wenn $\operatorname{div} F = 0$ und U ${}^{\ni 0}$ sternförmig. Eindeutig bis auf ein rotationsfreies VF: $G(x) = \int_0^1 t \, F(tx) \, dt \times x$ (Vektorpotential)

Warum Funktionentheorie?

<u>Potenzreihe</u> $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ konvergiert auf $]-\rho, \rho[$

ρ Kgzradius, $a_n \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

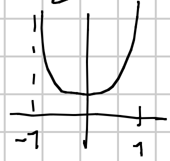
Dann ist f unendlich oft diffbar

Taylorreihe in $x_0 \in]-\rho,\rho[$

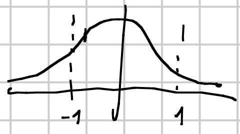
$$T_f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

2 Fragen:
- Konvergenzradius: im reellen schwierig
  mit Cauchy-Integralformel einfach
- konvergiert $T_f(x)$ gegen $f(x)$? im reellen schwierig
  mit Cauchy-Integralformel geschenkt

Beispiel:
- $1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}$ auf $]-1,1[$
  1, 0, 1, 0, 1, ...



- $1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \dots = \frac{1}{\underbrace{1+x^2}_{\text{auf } \mathbb{R} \text{ def}}}$ auf $]-1,1[$
  1, 0, -1, 0, 1, ...



Konvergenzradius in anderem Entwicklungspunkt?

<u>Funktiontheorie</u>

$f: U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ <u>holomorph</u>, wenn $f'(z) = \lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$

für alle $z \in U$ existiert.

Bsp. • $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}_0$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{z^n + nhz^{n-1} + \binom{n}{2} h^2 z^{n-2} + \dots + h^n - z^n}{h} = nz^{n-1}$$

• $f(z) = e^z$. $f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^z$

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{h}\left(\sum_{n\geq 0} \frac{h^n}{n!} - 1\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{h^{n-1}}{n!} \xrightarrow{h\to 0} 1$$

• Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \qquad z \in \mathbb{C},\ |z| < \rho,\ a_n \in \mathbb{C}$$

ist holomorph $f'(z) = \sum_{n\geq 0} n a_n z^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$

Kgzradius $\limsup_n \sqrt[n]{n|a_n|} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}_{=1} \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}$

Einschub: Potenzreihen in $\mathbb{C}$

$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$. $\rho := \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$ ist der Konvergenzradius, d.h. f ist auf $B_\rho(0) = \{|z| < \rho\}$ absolut konvergent.

Denn sei $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $r := |z| < \rho$

$$\sum_{n\geq 0} |a_n z^n| = \sum_{n\geq 0} |a_n| r^n < \infty, \text{ da } r < \rho$$

Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen (Erinnerung)

$U \subseteq \mathbb{C}$ $\quad f_n, f : U \to \mathbb{C}$

$f_n \to f$ gleichmäßig auf U bedeutet

$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}_0 \ \forall n \geq N \ \forall x \in U \ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

oder $\|f_n - f\|_U \xrightarrow{n \to \infty} 0$ mit Supremumsnorm $\|f\|_U := \sup\{|f(z)| \mid z \in U\}$

Jetzt wieder $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Kgzradius $\varrho > 0$

Auf jeder Kreisscheibe $\overline{B_r(0)} = \{|z| \leq r\}$ mit $r < \varrho$ konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig: Sei $|z| \leq r$

$$|f_n(z) - f(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k\right| \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k}_{\text{unabh. von } z} \xrightarrow{n \to \infty} 0, \text{ da } \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n < \infty$$

Genau wie für reelle Potenzreihen beweist man

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \Rightarrow f'(z) = \sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1} \quad \text{für } |z| < \varrho$$

(gliedweises Differenzieren)

$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Dann ist $F(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ Stammfunktion von f auf $B_\varrho(0)$, d.h. $F' = f$

(gliedweises Integrieren von Potenzreihen)

Lemma ("HDI für holomorphe Funktionen")

$U \subseteq \mathbb{C}$ offen $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph, f' stetig,

$\gamma: [t_0, t_1] \to U$, mit $\gamma(t_0) = a$, $\gamma(t_1) = b$:

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(b) - f(a)$$

Bew: $$\int_\gamma f'(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\,dt \overset{HDI}{=} f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_0))$$ ☐

Bemerkung: f' stetig ist automatisch erfüllt.

Beweis mit Cauchy-Integralsatz.