Mathematik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 5

Notiztitel 13.11.2012

Transformationsformel

<u>Satz:</u> Sei $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, $U = \mathring{\tilde{U}}$ offen $\tilde{U} \setminus U$ Nullmenge

$g: \tilde{U} \to g(\tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig diffbar $g|_U : U \to g(U)$ C^1 Diffeom.

$A \subseteq \tilde{U}$ kompakt, ∂A Nullmenge $f: \tilde{U} \to \mathbb{R}$ R-integrierbar

$$\int_{g(A)} f(x)\, d^n x = \int_A f(g(u))\, |\det J_g(u)|\, d^n u$$

Bsp: Polarkoordinaten

Sei $g: \underbrace{[0,R] \times [0,2\pi]}_{\tilde{U}} \to \mathbb{R}^2$ $\quad g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$

$U = \mathring{\tilde{U}} = (0,R) \times (0,2\pi)$ $\quad g|_U$ C^1 Diffeom.

$g(\tilde{U}) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \|x\| \leq R \}$

Somit $$\int_{\|x\| \leq R} f(x)\, d^2 x \overset{f \text{ stet}}{=} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, r\, f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Im Zweifelsfall ausschöpfende Folgen

Singularitäten im $\mathbb{R}^d$

$d=2$ $\quad \displaystyle\int_{\|x\|<R} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\, d^2x = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\epsilon\le\|x\|\le R} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\, d^2x$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^R \frac{r}{r^\alpha}\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$\overset{\alpha\neq 2}{=} \lim_{\epsilon\to 0^+} 2\pi \left[\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_\epsilon^R \overset{\alpha<2}{=} \frac{2\pi R^2}{(2-\alpha) R^\alpha}$$

$\frac{1}{\|x\|}$ ist bei 0 uneigentlich integrierbar im $\mathbb{R}^2$, nicht bei ∞

$\frac{1}{\|x\|^3}$ ist bei ∞ uneigentlich integrierbar im $\mathbb{R}^2$, nicht bei 0

$\alpha=2$ Grenzfall. $\qquad \int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx =$ n. def.

Singularitäten im $\mathbb{R}^n$

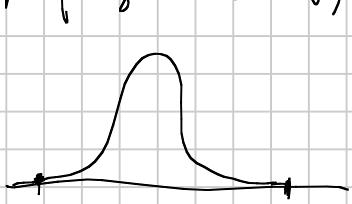
Im $\mathbb{R}^d$ ist $\frac{1}{\|x\|^\alpha}$ $\begin{cases} \text{bei } 0 \text{ integrierbar für } \alpha<d \\ \text{bei } \infty \text{ integrierbar für } \alpha>d \end{cases}$

Bew: Hausaufg.

z.B. Coulombpotential im $\mathbb{R}^3$: $\frac{1}{\|x\|}$ lokal integrierbar, bei ∞ nicht!

$\rho: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger d.h. $\operatorname{supp}(\rho)$ ist kp.

$V(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x-y)}{\|x-y\|}\, d^3y$ wohldefiniert (es gilt auch $\Delta V(x) = \rho(x)$)

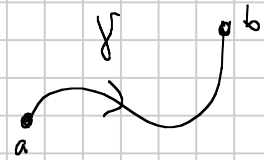


Erinnerung: $\operatorname{supp}(\rho) = \overline{\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \rho(x)\neq 0\}}$

Wiederholung: Kurvenintegral

$F \in C(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ stetiges Vektorfeld

$\gamma \in C^1(I, U)$ C^1-Kurve.



Dann ist

$$\int_\gamma F(r) \cdot dr \overset{\text{def}}{=} \int_I F(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt$$

Kurvenintegral ist parametrisierungsinvariant:

$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : \tilde{I} \to U$ mit $\varphi : \tilde{I} \to I$ C^1-Diffeom mit $\varphi' > 0$. Dann

$$\int_\gamma F(r) \cdot dr = \int_{\tilde{\gamma}} F(r) \cdot dr$$

[Bew: $\int_{\tilde{\gamma}} F(r) \cdot dr = \int_{\tilde{I}} F(\tilde{\gamma}(s))\, \dot{\tilde{\gamma}}(s)\, ds = \int_{\tilde{I}} F(\gamma(\varphi(s)))\, \dot{\gamma}(\varphi(s))\, \dot{\varphi}(s)\, ds \overset{\text{Subst.}}{=} \int_I F(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt$

$= \int_\gamma F(r) \cdot dr$ ☐

Ist F ein Gradientenfeld, d.h. $F = \nabla f$, dann ist das Kurvenintegral wegunabhängig: $\gamma : [t_0, t_1] \to U$

$$\int_\gamma F(r) \cdot dr = f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_0))$$

[Bew $\int_\gamma \nabla f(r) \cdot dr = \int_{t_0}^{t_1} \nabla f(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\, dt = f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_0))$ ☒

$F \in C^1$

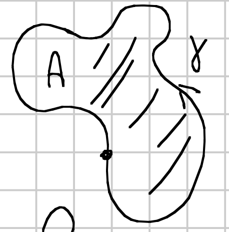
Ist U sternförmig und $F'(x)$ symmetrisch, dann ist F ein Gradientenfeld.

Im $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$: U sternförmig, $\operatorname{rot} F = 0 \Rightarrow$ Es gibt Potential f mit $F = \nabla f$

Satz von Stokes (Green) im $\mathbb{R}^2$ $\quad U \supseteq A$ offen, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$, A kp mit glattem Rand ∂A parametrisiert durch $\gamma: I \to \partial A$ mit positivem Umlauf,

$\operatorname{rot} F \overset{\text{def}}{=} \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1$. Dann.

$$\int_A \nabla \times F(y)\, d^2y = \oint_\gamma F(r) \cdot dr$$



Anwendung: Flächenberechnung.

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ glatter Rand, parametrisiert durch $\gamma: [a,b] \to \partial A$, Fläche von A?

$$\operatorname{vol}(A) = \int_A 1\, dxdy \overset{!}{=} \int_A \operatorname{rot} F(x,y)\, dxdy \overset{\text{Stokes}}{=} \int_\gamma F(r) \cdot dr$$

zB. $F(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{rot} F(x,y) = 1$. Also

$$\boxed{\operatorname{vol}(A) = \frac{1}{2}\int_\gamma \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot dr(x,y) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\gamma_1(t)\dot\gamma_2(t) - \gamma_2(t)\dot\gamma_1(t)\right) dt}$$

ebenso $F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$, $\operatorname{rot} F(x,y) = 1$ oder $F(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rot} F = 1$

Bsp: $A = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$, $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix}$

$$\operatorname{vol}(A) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t\right) = R^2\pi$$

Illustration: Sei A Polygon mit Ecken $\vec{x}_i$, $i = 1, \dots, n$, $\vec{x}_0 := \vec{x}_n$

$\Delta\vec{x}_i = \vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i$ $\qquad \vec{x} = (x, y)$

Fläche des Dreiecks $O\vec{x}_i\vec{x}_{i+1}$: $\frac{1}{2}\det(\vec{x}_i \ \vec{x}_{i+1}) = \frac{1}{2}(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})$

$$\mathrm{vol}\ A = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \underbrace{\det(\vec{x}_i \ \vec{x}_{i+1})}_{\det(\vec{x}_i \ \Delta\vec{x}_i)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})$$

wg. $\det(\vec{x}_i \ \vec{x}_i) = 0$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i \Delta y_i - y_i \Delta x_i)$$