Mathematik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 1

Notiztitel 16.10.2012

www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2012W

Beginn der Zentralübung 12:30

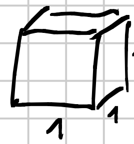
- Übungsblätter: immer Donnerstags
- Abgabe zu zweit bis übernächsten Montag.
- Tutorgruppen beginnen am Montag, den 29.10.2012
- Bonus wie letztes Semester: 70% sinnvoll bearb., 1x Vorrechnen
- Prüfung: 15.2.2013, 11:30. Keine Hilfsmittel
- Einschreibung in Tutorübungen ab heute 16.10. 19:00

T1 Mo 14-16
T2 Mo 16-18
T3 Di 14-16 (?)
T4 Di 16-18
T5 Mi 12-14 (englisch)
T6 Mi 12-14
T7 Mi 14-16
T8 Mi 16-18
T9 Do 14-16

Integration – Bestimmen von Flächen und Volumina

Einheitswürfel

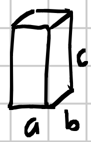
W



$\mathrm{vol}(W) = 1$

Quader

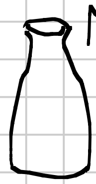
$Q \subseteq \mathbb{R}^3$



$\mathrm{vol}(Q) = abc$

Inneres einer Milchflasche

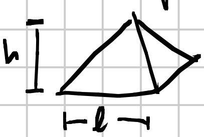
M



$\mathrm{vol}(M) = ?$

Pyramide

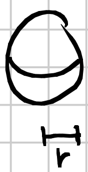
P



$\mathrm{vol}(P) = \frac{1}{3} l^2 h$

Kugel

K

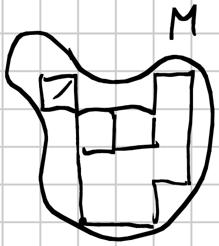


$\mathrm{vol}(K) = \frac{4}{3} r^3 \pi$

Wie kommt man darauf?

$\mathbb{R}^2$

M



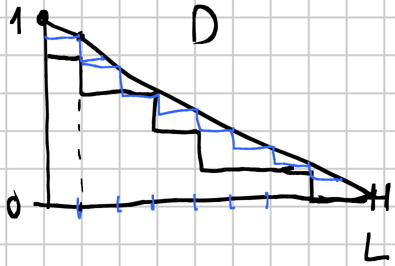
Fläche (2-dim Volumen)

$\mathrm{vol}(M) \approx$ Anzahl der in M enthalten Quadrate der Seitenlänge 2^{-n} $\cdot (2^{-n})^2$

$n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^2$ $\quad Q_m^{(n)} := 2^{-n}\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + [0,1]^2\right)$

$$\mathrm{vol}(M) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{2^{-2n} \left| \{ m \in \mathbb{Z}^2 \mid Q_m^{(n)} \subseteq M \} \right|}_{=: \mathrm{vol}_n(M)}$$

Bsp.: Dreieck



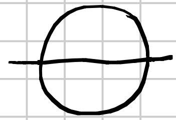
$f(x) = 1-\frac{x}{L}$ $\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le L \wedge 0\le y\le f(x)\}$

$$\mathrm{vol}_n(D) = \sum_{k=1}^{\mathrm{ceil}(2^n L)} 2^{-2n}\,\mathrm{floor}_n\left(f(2^{-n}k)\right), \quad \mathrm{floor}_n(x)=\frac{\mathrm{floor}(2^n x)}{2^n}$$

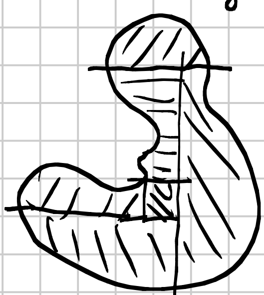
$$\underbrace{\underline{S}_{2^n}(f)}_{\to \int_0^L f(x)dx} - \underbrace{L\cdot 2^{-n}}_{\to 0} \le \mathrm{vol}_n(D) \le \int_0^L f(x)dx$$

also $\mathrm{vol}_n \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{vol}(D) = \int_0^L f(x)dx = \frac{L}{2}$

Verallgemeinerung: Mengen deren Rand durch Funktionsgraphen gegeben ist (Normalbereiche)



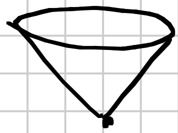
Allgemeinere Mengen: Zerlegung in Normalbereiche



In der Praxis trifft man fast nur solche in Normalbereiche zerlegbare Mengen

Wie sind solche Mengen typischerweise gegeben?

Über Ungleichungen $K=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid |x|\le r\}$ Kugel

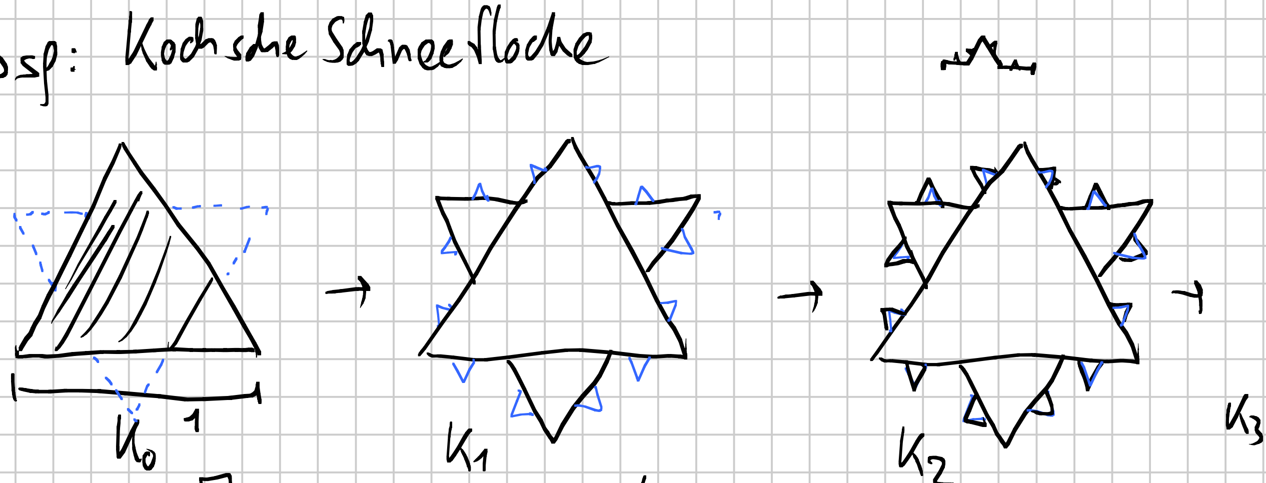


$$\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x_1^2+x_2^2}\le x_3\le 2\} = L$$

$$\partial L = \{x\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x_1^2+x_2^2} = x_3 \le 2 \vee \sqrt{x_1^2+x_2^2}\le x_3 = 2\}$$

Der Rand ist durch Gleichungen gegeben. Durch Auflösen nach einer Variablen oder mit dem Satz über implizite Funktionen erhält man den Rand als Graph von geeigneten Funktionen.

Bsp: Kochsche Schneeflocke



$\mathrm{vol}(K_0) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ $\qquad$ $\mathrm{vol}(K_1) = \mathrm{vol}(K_0)\left(1 + 3\cdot\frac{1}{9}\right) = \frac{4}{3}\mathrm{vol}(K_0)$

$\mathrm{vol}(K_2) = \mathrm{vol}(K_1) + \mathrm{vol}(K_0)\cdot\frac{1}{3^4}\, 3\cdot 4 .$

$\mathrm{vol}(K_3) = \mathrm{vol}(K_0)\left(1 + \frac{3}{9} + \frac{3\cdot 4}{3^4} + \frac{3\cdot 4\cdot 4}{3^6}\right)$

$K_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} K_n$. $\mathrm{vol}(K_\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}(K_n)$

$$\mathrm{vol}(K_n) = \mathrm{vol}(K_0)\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4^1}{3^2} + \frac{4^2}{3^4} + \dots + \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}\right)\right)$$

$$= \mathrm{vol}(K_0)\left(1 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^k\right) \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{vol}(K_0)\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right)$$

$$= \mathrm{vol}(K_0)\,\frac{8}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{3}$$

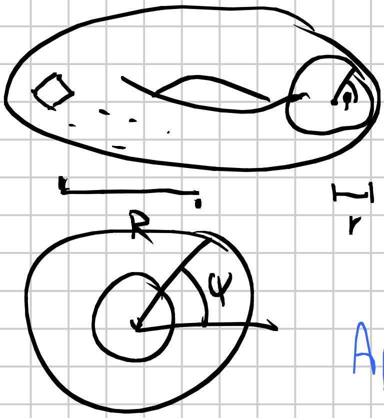
Ausblick: Flächen im Raum, Flächeninhalt

- Einheitsquadrat im $\mathbb{R}^3$ $\quad [0,1]^2\times\{0\}$ $\quad$ Fläche 1

- Ist $F \subseteq \mathbb{R}^2\times\{0\}$ so ist $\text{fläche}(F) = \mathrm{vol}(\tilde{F})$ mit $F = \tilde{F}\times\{0\}$
- Ebenes Flächenstück im Raum $\qquad \vec{a}, \vec{b}$

  Drehe in die x-y Ebene

- Damit berechnet man die Oberfläche von Polyedern
- Gekrümmte Flächen im Raum?



$$T = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 = r^2 \right\}$$

$$x(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi\,(R + r\cos\varphi) \\ \sin\psi\,(R + r\cos\varphi) \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$ (Parametrisierung

Approximation durch Polyeder