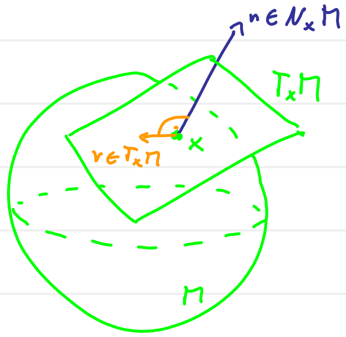
# Tangential- und Normalraum

**Idee:** Linearisierung einer UMF $M \subseteq \mathbb{R}^n$ am Punkt $x \in M$: $M \approx x + T_x M$




**Def.:** • Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ $C^1$-UMF und $x \in M$.

Dann heißt

$$T_x M := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \gamma \in C^1((-1,1), M) \text{ mit} \\ \gamma(0) = x \text{ und } \dot\gamma(0) = v \end{array} \right\}$$

„Tangentialraum" von $M$ an $x$.

• $N_x M := (T_x M)^\perp$ heißt „Normalraum" von $M$ an $x$.

**Bemerkung:** $N_x M$ & $T_x M$ sind orthogonale Unterräume des $\mathbb{R}^n$ mit $\dim(T_x M) = m$ und somit $\dim(N_x M) = n-m$.

**Satz:** Sei $M$ eine $m$-dim. $C^1$-UMF des $\mathbb{R}^n$ und $x \in M$.

(i) Ist $h: V \subseteq M \to V' \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte um $x \in V$ mit $h(x) = y$ & $\varphi := h^{-1}$.

Dann ist $\boxed{T_x M = \varphi'(y)\, \mathbb{R}^m}$

(d.h. die Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix der Parametrisierung $\varphi$ bilden eine Basis des Tangentialraums.)

(ii) Ist $x \in U \subseteq M$ und $U = f^{-1}(\{0\})$ für $f \in C^1(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-m})$, mit regulärem Wert $0$ (also Rang $f'(x) = n-m$), dann gilt

$$\boxed{T_x M = \ker[f'(x)]}$$

$$\boxed{N_x M = \operatorname{span}\{\nabla f_1, \dots, \nabla f_{n-m}\}} \quad (*)$$

**Beweis:** (bis auf $(*)$ → Analysis 2)

$(*)$: 
$$\begin{aligned} N_x M &= \{ n \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in T_x M : \langle n, v \rangle = 0 \} \\ &= \{ n \in \mathbb{R}^n \mid f'(x) v = 0 \Rightarrow \langle n, v \rangle = 0 \} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \left( [f'(x)]_{k,1}, \dots, [f'(x)]_{k,n} \right) \right\}_{k=1}^{n-m} \end{aligned}$$

$\square$

**Korollar:** Ist $h: U \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^3 \to U' \subseteq \mathbb{R}^2$ Karte einer $C^1$-UMF um $x \in U$ und $\psi := h^{-1}$.
Dann gilt mit $y := h(x)$:

$$\boxed{\begin{aligned} &(i) \quad T_x M = \operatorname{span}\{\partial_1 \psi(y), \partial_2 \psi(y)\} \\ &(ii) \quad N_x M = \operatorname{span}\{\partial_1 \psi(y) \times \partial_2 \psi(y)\} \end{aligned}}$$

**Beweis:**
(i) $T_x M = \psi'(y)\,\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}\{\partial_1 \psi(y), \partial_2 \psi(y)\}$
(ii) folgt aus $(T_x M)^\perp = N_x M$ und Eigenschaft des Kreuzprodukts. $\square$

## Integration auf UMFs

**Bemerkung:** Eine $m$-dim UMF $M \subseteq \mathbb{R}^n$ hat kein ($n$-dim.) Volumen für $m < n$.
Wir können ihr jedoch ein $m$-dim. Volumen zuweisen ...

**Def.:** Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $n \geq m$ mit Singulärwerten $\{s_i \geq 0\}_{i=1}^m$.
Das „<u>m-dimensionale Volumen</u>" des Parallelotops $A[0,1]^m \subseteq \mathbb{R}^n$ ist:

$$\mathrm{vol}_m\left(A[0,1]^m\right) := \prod_{i=1}^m s_i$$

**Lemma:** Für $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $m \leq n$, mit Singulärwerten $\{s_i\}_{i=1}^m$ gilt

$$\prod_{i=1}^m s_i = \sqrt{\det(A^T A)}$$

**Beweis:** Singulärwertzerlegung: $A = U \Lambda V$ mit $U, V$ orthogonal &
$\Lambda_{kl} = \delta_{kl} s_k$, $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Damit ist $\det(A^T A) = \det(V^T \Lambda^T \underbrace{U^T U}_{= \mathbb{1}} \Lambda V)$

$$= \underbrace{\det(V^T)}_{=1} \det(\underbrace{\Lambda^T \Lambda}_{= \mathrm{diag}(s_1^2 \dots s_m^2)}) \underbrace{\det(V)}_{=1} = \prod_{i=1}^m s_i^2$$

**Def.:** Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine $m$-dim. UMF und $\psi: V \subseteq \mathbb{R}^m \to U \subseteq M$ ein $C^1$-Diffeomorph.

- $G: V \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $G(x) := \psi(x)'^T \psi(x)'$ heißt „metrischer Tensor"
- $g(x) := \det(G(x))$ heißt „Gram'sche Determinante"
- $f: U \to \mathbb{R}$ heißt über $U$ integrierbar mit Integral $\int_U f(x)\,dS(x)$, wenn

$$\boxed{\int_V f(\psi(y))\sqrt{g(y)}\,dy =: \int_U f(x)\,dS(x)}$$ existiert.

**Bemerkungen:**

- existiert eine globale Parametrisierung von $M$, läßt sich so schon das Integral über die UMF $M$ definieren.
- $\int_U f(x)\,dS(x)$ ist unabh. von $\psi$ (folgt aus Transformationssatz)
- für $m=n$, $dS(x) = dx$ ist die Def. konsistent mit dem Transformationssatz
- „$dS$" für "surface element"
- $$\mathrm{vol}_m(\psi(V)) = \int_V \sqrt{\det(\psi'(y)^T\psi'(y))}\,dy = \int_{\psi(V)} dS(x)$$

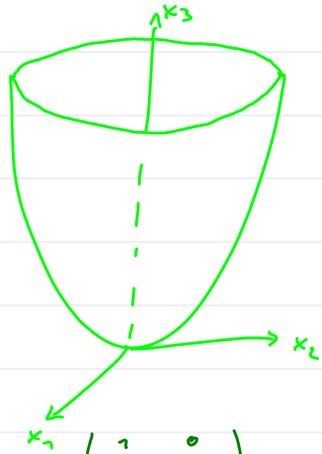
**Lemma:** Ist die $m$-dim. UMF $M \subseteq \mathbb{R}^n$ in $U \subseteq M$ als Graph von $f \in C^1(V \subseteq \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{n-m})$ gegeben, dann ist $\forall x \in U$: $G(x) = \mathbb{1}_m + f'(x)^T f'(x)$ & für $m = n-1$:

$$\boxed{g(x) = 1 + \|Df(x)\|^2}$$

**Beweis:** Wähle die Parametrisierung $\psi: V \subseteq \mathbb{R}^m \to U \subseteq M$, $x \mapsto (x, f(x))$.
Dann ist $\psi'(x)^T\psi'(x) = \mathbb{1}_m + f'(x)^T f'(x)$, da $\psi'(x)^T = (\mathbb{1}_m \;\; f'(x)^T)$.
Für $m=n-1$ hat $G(x)$ $m-1$ Eigenwerte $1$ & einen E.w. $1+\|Df(x)\|^2$.

$\square$

**Bsp.: Oberfläche des Paraboloidstumpfs**




$$U := \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3 \wedge x_3 < 1 \}$$

$$\psi : V := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1 \} \to U$$

$$\psi : (x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fläche von } U = \mathrm{vol}_2(U) = \int_U dS(x)$$

$$= \int_V \left[ \det\left( \psi'(y)^T \psi'(y) \right) \right]^{1/2} dy$$

$$\psi'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow G(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 + 4x_1^2 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & 1 + 4x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det G(x_1, x_2) = 1 + 4(x_1^2 + x_2^2)$$

$$= \int_V \sqrt{1 + 4(x_1^2 + x_2^2)}\, d(x_1, x_2)$$

Polarkoordinaten

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr = \frac{2\pi}{8} \frac{2}{3} \left[ (1 + 4r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^{1} = \frac{\pi}{6} \left( 5^{3/2} - 1 \right)$$

□

**Lemma:** Ist $\psi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \subseteq \mathbb{R}^3$ stetig diff.bar, dann gilt für die Gram'sche Determinante:

$$\boxed{\sqrt{g(y)} = \| \partial_1 \psi(y) \times \partial_2 \psi(y) \|_2}$$

**Beweis:** $\psi'(y) = \begin{pmatrix} \partial_1 \psi(y) & \partial_2 \psi(y) \end{pmatrix} \Rightarrow \psi'(y)^T \psi'(y) = \begin{pmatrix} \|\partial_1 \psi(y)\|^2 & \langle \partial_1 \psi(y), \partial_2 \psi(y) \rangle \\ \langle \partial_1 \psi(y), \partial_2 \psi(y) \rangle & \|\partial_2 \psi(y)\|^2 \end{pmatrix}$

Damit ist $\sqrt{g(y)} = \|\partial_1 \psi(y)\| \, \|\partial_2 \psi(y)\| \cdot \sqrt{1 - \left( \cos \sphericalangle(\partial_1 \psi(y), \partial_2 \psi(y)) \right)^2}$

$$= \| \partial_1 \psi(y) \times \partial_2 \psi(y) \|$$

□

Gibt es für eine UMF keine globale Parametrisierung, definiert man das Integral $\int_{\Pi} f(x)\,dS(x)$ mit Hilfe eines Atlas und einer Zerlegung von $f$ in Funktionen mit kleinem Träger ...

**Def.:** Der „Träger" (support) von $f: U \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\boxed{\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}}}$$

Abschluss in $U$ (Teilraumtopologie für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ !)

**Lemma:** Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $\{U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n\}_{\alpha=1}^{k}$ eine offene Überdeckung von $M$.
Dann gibt es $\{f_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])\}_{\alpha=1}^{k}$, so dass

(i) $\operatorname{supp}(f_\alpha) \subseteq U_\alpha$

(ii) $\sum_{\alpha=1}^{k} f_\alpha(y) = 1 \quad \forall y \in M$

Die $f_\alpha$'s heißen eine der Überdeckung $\{U_\alpha\}$ untergeordnete „Zerlegung der Eins" auf $M$

**Beweisidee:**

- $\phi(x) := \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right], & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$ ist $C^\infty$ mit $\operatorname{supp}(\phi) = \overline{B_1(0)}$
- konstruiere die $f$'s durch Verschiebung & Stauchung von $\phi$ ... $\square$

**Def.:** Sei $M$ eine $m$-dim. $C^1$-UMF von $\mathbb{R}^n$, $f: M \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und $\{\varphi_\alpha : V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m \to U_\alpha \subseteq M\}_{\alpha=1}^{k}$ lokale Parametrisierungen mit $\bigcup_\alpha U_\alpha \supseteq \operatorname{supp}(f)$. Ist $\{f_\alpha\}_{\alpha=1}^{k}$ eine $\{U_\alpha\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins von $\operatorname{supp}(f)$, dann definieren wir

$$\boxed{\int_M f(x)\,dS(x) := \sum_{j=1}^{k} \int_{U_j} f_j(x) f(x)\,dS(x)}$$

**Bemerkung:** man kann wieder zeigen, dass dies unabh. von der Parametrisierung ist.