....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

Prof. Dr. M. Wolf

15. Februar 2013, 11:30 – 13:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Es sind **keine** Hilfsmittel erlaubt.

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Volumenberechnung** **[6 Punkte]**

Berechnen Sie das Volumen der Menge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } y^2 + z^2 \leq 1\}$.
HINWEIS: Integrieren Sie die z-Variable als letztes aus.
LÖSUNG:

$(x, y, z) \in M$ genau dann, wenn $z \in [-1, 1]$ und $x, y \in [-\sqrt{1 - z^2}, \sqrt{1 - z^2}]$. **[1]**
Somit ist M ein Normalbereich und mit Fubini ist **[1]**

$$\int_M dxdydz = \int_{-1}^{1} dz \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dx \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dy = \int_{-1}^{1} dz (2\sqrt{1 - z^2})^2 = 4 \int_{-1}^{1} dz (1 - z^2) = 4(2 - \tfrac{2}{3}) = \frac{16}{3}.$$

[4]

2. **Transformationsformel** **[12 Punkte]**

Sei $M := \{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid \frac{x}{y} \in [1,4], xy \in [1,4]\}$ und $f(x,y) = x^3 y$. Gegeben ist die Parametertransformation $(x,y) = g(u,v) = \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right)$.

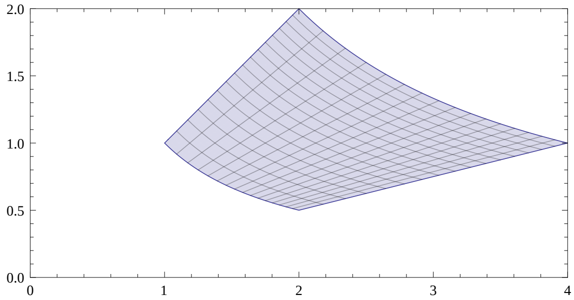
(a) Geben Sie die Jacobi-Determinante von g auf $(\mathbb{R}^+)^2$ an: **[3]**

$$\det J_g(u,v) = -\frac{1}{2v}$$

(b) Wie lautet die Umkehrabbildung von g auf $(\mathbb{R}^+)^2$? **[2]**

$$g^{-1}(x,y) = \left(xy, \frac{x}{y}\right)$$

(c) Skizzieren Sie die Menge M. **[2]**



(d) Wie lautet die Menge $B = g^{-1}(M)$. **[2]**

$$B = [1,4] \times [1,4]$$

(e) Geben Sie den Wert von $\int\limits_M f(x) d^2x$ an. **[3]**

$$\int\limits_M f(x,y) dx dy = \frac{63}{2}$$

LÖSUNG:

(a)-(d) s.o., (e) $\int\limits_M f(x,y) dx dy = \int\limits_1^4 du \int\limits_1^4 dv \sqrt{uv}^3 \sqrt{\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{2v} = \frac{1}{2} \int\limits_1^4 du \, u^2 \int\limits_1^4 dv = \frac{3}{2}(\frac{64}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{63}{2}$.

3. **Oberflächenintegrale** **[8 Punkte]**

Sei die Fläche $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z = 4,\ z \geq 0\}$ so orientiert, dass das Normalenfeld eine positive z-Komponente hat, und $v(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 - y \\ x \\ x^y \sin z \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld.

(a) Wie lautet das auf Eins normierte Normalenvektorfeld $n(x, y, z)$ im Punkt $(x, y, z) \in A$? **[2]**

$$n(x, y, z) = \quad \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Was besagt allgemein der Satz von Stokes für den Fluss von $\operatorname{rot} v$ durch A? **[2]**

$$\int_A \langle \operatorname{rot} v(x), n(x) \rangle dS(x) = \int_{\partial A} v(x) \cdot dx$$

(c) Geben Sie eine Parametrisierung der Randlinie ∂A von A an. **[2]**

$$\gamma(t) = \quad \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(d) Welchen Wert hat der Fluss von $\operatorname{rot} v$ durch A? **[2]**

$$\int_A \langle \operatorname{rot} v, n \rangle dS = \quad 8\pi$$

LÖSUNG:

(a) Für $(x, y, z) \in A$ ist $n(x, y, z) = \frac{\nabla h(x,y,z)}{\|\nabla h(x,y,z)\|}$ mit $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$.

(b) s.o.

(c) $\partial A = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 4\}$, also ein Kreis mit Radius 2 um den Ursprung in der xy-Ebene. Der Orientierung von A entsprechend wird er im mathematischen Sinne durchlaufen.

(d) $\displaystyle\int_A \langle \operatorname{rot} v, n \rangle dS = \int_{\partial A} v \cdot dx = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 8\pi.$

4. **Residuen** **[7 Punkte]**

Sei $f(z) = \frac{1}{(z+\frac{1}{z})}$.

(a) f hat bei $z = 0$ **[1]**

☐ keine Singularität, ☒ eine hebbare Singularität,
☐ einen Pol erster Ordnung, ☐ eine wesentliche Singularität.

(b) Bestimmen Sie das Residuum von f bei $z = i$. **[2]**

$$\boxed{\mathrm{Res}_i(f) = \frac{1}{2}}$$

(c) Welchen Konvergenzradius R hat die Potenzreihenentwicklung von f im Entwicklungspunkt $z = 1$? **[2]**

$$\boxed{R = \sqrt{2}}$$

(d) Welchen Wert hat das komplexe Wegintegral $\int_\gamma f(z)dz$ entlang der Kurve $\gamma : [0, 6\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = i + \sqrt{2}e^{-it}$? **[2]**

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = -3\pi i}$$

LÖSUNG:

(a) $f(z) = \frac{z}{z(z+\frac{1}{z})} = \frac{z}{z^2+1}$ für $z \neq 0$, hat also eine hebbare Singularität bei $z = 0$.

(b) $f(z) = \frac{z}{(z+i)(z-i)}$, hat also einen Pol erster Ordnung bei $z = i$. Somit gilt
$\mathrm{Res}_i(f) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i} = \frac{z}{z+i} = \frac{1}{2}$.

(c) Die Konvergenzkreisscheibe reicht bis zum nächsten Pol bei $z = \pm i$. Deren Abstand ist $\sqrt{2}$.

(d) Der Weg γ umrundet den Pol $z = i$ und nur diesen dreimal im Uhrzeigersinn. Somit ist
$\int_\gamma f(z)dz = -3 \int_{|z-i|=\sqrt{2}} f(z)dz = -3(2\pi i)\mathrm{Res}_i(f) = -3\pi i$.

5. **Residuenkalkül** **[12 Punkte]**

Sei $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$ mit $0 < \alpha < 1$.

(a) Berechnen Sie das Residuum von $f(z)$ bei $z = i\pi$.

(b) Welchen Wert hat $\int\limits_{\partial Q} f(z)dz$ für $Q_R := \{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x \in [-R, R],\ y \in [0, 2\pi]\}$, $R > 0$?

(c) Zeigen Sie, dass $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.

Hinweis: Benutzen Sie, dass $|f(x + iy)| \leq \frac{e^{\alpha x}}{|1-e^x|} \to 0$ für $|x| \to \infty$.

Lösung:

(a) $\mathrm{Res}_{i\pi}(f) = \frac{e^{i\alpha\pi}}{e^{i\pi}} = -e^{i\alpha\pi}$. **[2]**

(b) Das Rechteck Q_R enthält nur den Pol bei $i\pi$, da $e^z = -1 \iff z \in i\pi + 2\pi i\mathbb{Z}$ **[1]**
Daher ist $\int\limits_{\partial Q_R} f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}_{i\pi}(f) = -2\pi i e^{i\alpha\pi}$. **[1]**

(c) Setze $C_R := \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx$. Somit ist

$$\int\limits_{\partial Q_R} f(z)dz = C_R + H(R) - \int\limits_{-R}^{R} f(x + 2\pi i)dx - H(-R).$$

[1]

Es gilt $|H(x)| = \left| \int\limits_0^{2\pi} f(x + it)idt \right| \leq 2\pi \sup\limits_{y\in\mathbb{R}} |f(x + iy)| \overset{\text{Hinweis}}{\leq} 2\pi \frac{e^{\alpha x}}{|1-e^x|} \to 0$ für $|x| \to \infty$. **[2]**

Wegen $\int\limits_{-R}^{R} f(x + 2\pi i)dx = \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha x+2\pi i\alpha}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = e^{2\pi i\alpha} \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx = e^{2\pi i\alpha} C_R$ folgt **[2]**

$$(1 - e^{2\pi i\alpha})C_R + (H(R) - H(-R)) = -2\pi i e^{i\alpha\pi},$$

[1]

was wegen (a) im Limes $R \to \infty$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx = \lim_{R\to\infty} C_R = -2\pi i \frac{e^{i\alpha\pi}}{1 - e^{2\pi i\alpha}} = \pi \frac{2i}{e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$$

ergibt. **[2]**

6. **Fouriertransformation** **[8 Punkte]**

(a) Beweisen Sie für $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $g(x) := e^{ik_0 x} f(x)$ die Identität $\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k - k_0)$.

(b) Wie lautet die Fouriertransformierte von $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos x$, $x \in \mathbb{R}$?

(c) Sei nun mit dem g aus (b) die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(i) Welche Aussagen gelten für h? **[2]**

☐ $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ☐ h ist stetig, ☒ $h \in L^1(\mathbb{R})$, ☒ $h \in L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Welche Aussagen gelten für $\widehat{h}$? **[2]**

☐ $\widehat{h} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ☒ $\widehat{h}$ ist stetig, ☐ $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$, ☒ $\widehat{h} \in L^2(\mathbb{R})$.

LÖSUNG:

(a)

$$\sqrt{2\pi}\widehat{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(k-k_0)x} dx = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(k - k_0)$$

[2]

(b) Die Fouriertransformierte von $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ist $e^{-\frac{1}{2}k^2}$. Mit (a) erhält man

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{2}(\widehat{e^{ix}e^{-\frac{1}{2}x^2}} + \widehat{e^{-ix}e^{-\frac{1}{2}x^2}}) = \frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{2}(k-1)^2} + e^{-\frac{1}{2}(k+1)^2})\left(= e^{-\frac{1}{2}(k^2+1)} \cosh(2k)\right).$$

[2]

(c) Die Funktion h ist unstetig bei 0, aber wegen des exponentiellen Abfalls für $x \to \infty$ sowohl integrierbar, als auch quadratintegrierbar.

(d) $\widehat{h}$ ist als Fouriertransformierte einer L^1-Funktion stetig, da $h \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist auch $\widehat{h}$ keine Schwartz-Funktion. $\widehat{h}$ ist keine L^1-Funktion, sonst müsste h fast überall gleich einer stetigen Funktion sein, was wegender Unstetigkeitsstelle unmöglich ist. $\widehat{h}$ ist aber genauso wie h in L^2.

7. **Distributionen** **[4 Punkte]**

Zeigen Sie, dass die Ableitung der als Distribution aufgefassten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)^2 & \text{für } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gleich $\delta - 2(1-x)\chi_{[0,1]}$ ist.
LÖSUNG:

Für $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\begin{aligned} f'[\phi] = -f[\phi'] &= -\int_0^1 (1-x)^2 \phi'(x) dx = -\big[(1-x)^2\phi(x)\big]_0^1 - \int_0^1 2(1-x)\phi(x) dx \\ &= \phi(0) - \int_0^1 2(1-x)\phi(x) dx = \delta[\phi] - \big(2(1-x)\chi_{[0,1]}\big)[\phi] \end{aligned}$$

[4]

8. **Hilbertraum** **[6 Punkte]**

(a) Wie lautet die Definition einer Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$?

(b) Sei b_n, $n \in \mathbb{N}$, eine orthonormale Folge von Vektoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und α_n eine quadratsummierbare Folge komplexer Zahlen, d.i., $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$.

Man zeige: $x_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k b_k$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}$.

LÖSUNG:

(a) $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N\ :\ \|x_n - x_m\| < \epsilon.$ **[2]**

(b) Sei $\epsilon > 0$. Dazu gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \epsilon^2$. Somit gilt für alle $n > m \geq N$

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k b_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k b_k, \sum_{l=m+1}^{n} \alpha_l b_l \right\rangle = \sum_{k=m+1}^{n} \sum_{l=m+1}^{n} \overline{\alpha_k} \alpha_l \underbrace{\langle b_k, b_l \rangle}_{=\delta_{kl}}$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|^2 < \epsilon^2.$$

[4]