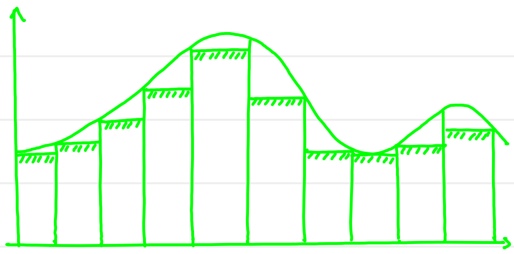
Def.: (Lebesgue Integral) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.

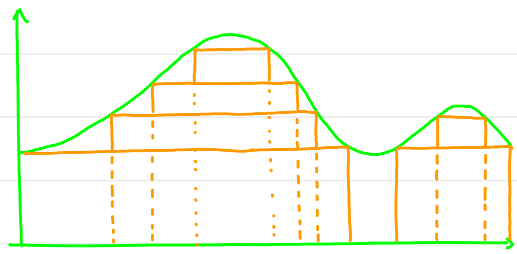
- Für eine meßbare Fkt. $f: \Omega \to [0, \infty]$ mit $F(t) := \mu\left(\{x \in \Omega \mid f(x) > t\}\right)$ heißt

$$\boxed{\int_\Omega f \, d\mu := \int_\Omega f(x) \, \mu(dx) := \int_0^\infty F(t) \, dt}$$

„(Lebesgue-) Integral" & f „(Lebesgue-) integrierbar" falls $\int_\Omega f \, d\mu < \infty$



Riemann-Integral: Unterteilung im Def.bereich



Lebesgue-Integral: Unterteilung im Wertebereich

- Ist $f: \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ meßbar, dann ist das (Lebesgue-) Integral definiert als

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int (\mathrm{Re} f)_+ \, d\mu - \int (\mathrm{Re} f)_- \, d\mu + i \int (\mathrm{Im} f)_+ \, d\mu - i \int (\mathrm{Im} f)_- \, d\mu ,$$

wobei $(\dots)_+, (\dots)_-$ den pos. & neg. Anteil bezeichnet. f heißt „(absolut Lebesgue-) integrierbar", wenn $\boxed{\int_\Omega |f| \, d\mu < \infty .}$

integrierbar = absolut integrierbar!

Bemerkung:
- Ist $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = 0$ & $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0 \end{cases}$ (z.B. $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$)

  dann gilt $\int_A d\mu := \int_\Omega \chi_A(x) \, \mu(dx) = 0$.
- Ist $f = g$ fast überall, dann gilt $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$
- Ist $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (uneig.) absolut Riemann integrierbar, dann gilt

$$\boxed{\text{Riemann-Integral} = \text{Lebesgue-Integral}}$$

mit $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\Sigma = \mathcal{B}$, μ = Lebesgue-Maß. Im Folgenden meint daher

$\boxed{\int_\Omega f(x) \, dx := \int_\Omega f(x) \, \mu(dx)}$ stets das Lebesgue-Integral.

Satz (Zusammenfassung der wichtigsten Konvergenzsätze):

Sei (Ω, Σ, μ) ein beliebiger Maßraum. Dann gilt:

(i) Sind $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ meßbare Fkt.en $f_n : \Omega \to [0,\infty]$,

dann ist $$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

(ii) Sind $\{f_n : \Omega \to [0,\infty]\}_{n\in\mathbb{N}}$ meßbar,

dann ist $$\int_\Omega \sum_n f_n \, d\mu = \sum_n \int_\Omega f_n \, d\mu$$

„Monotone Konvergenz"

(iii) Sind $\{f_n : \Omega \to \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ meßbar & so, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ bzgl. μ fast überall existiert und es eine integrierbare Fkt. $g : \Omega \to [0,\infty]$ gibt, so dass $\forall n : |f_n| \leq g$, dann gilt

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

(iv) Sind $\{f_n : \Omega \to \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ meßbar mit $\sum_n \int_\Omega |f_n| \, d\mu < \infty$, dann ist $\sum_n f_n(x)$ fast überall absolut konvergent und

$$\int_\Omega \sum_n f_n \, d\mu = \sum_n \int_\Omega f_n \, d\mu$$

„Majorisierte Konvergenz"

Hilfreich zur Berechnung von Integralen:

Für Lebesgue-Integrale gelten die üblichen Rechenregeln:

Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ integrierbar & $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, dann ist $\alpha f + \beta g$ integrierbar &

$$\boxed{\int_\Omega \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int_\Omega f \, d\mu + \beta \int_\Omega g \, d\mu}$$

$$\boxed{\left| \int_\Omega f \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f| \, d\mu}$$

Satz: (Fubini) Ist $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ integrierbar, dann gilt

(i) $\mathbb{R}^m \ni x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ ist für fast alle $x_2 \in \mathbb{R}^n$ integrierbar

(ii) $x_2 \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2)\, dx_1$ ist integrierbar

(iii) $$\boxed{\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, x_2)\, dx_1 \right) dx_2}$$

Bemerkung: natürlich gilt dies auch für $x_1 \leftrightarrow x_2$.

Def.: ∘ Sind $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ meßbar, dann definieren wir

$$\int_U f(x)\, dx := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_U(x) f(x)\, dx ,$$

wobei $\chi_U(x) := \begin{cases} 1, & x \in U \\ 0, & x \notin U \end{cases}$ die „charakteristische Fkt." von U ist.

∘ f heißt „integrierbar über U", wenn $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_U(x) |f(x)|\, dx < \infty$.

Satz: (Transformationssatz) Sind $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi: V \to U$ ein C^1-Diffeomorphismus und $f: U \to \mathbb{C}$ meßbar, dann gilt:

(i) f ist integrierbar über U $\Leftrightarrow$ $x \mapsto f(\varphi(x)) |\det \varphi'(x)|$ ist int.bar über V

(ii) $$\boxed{\int_{U = \varphi(V)} f(y)\, dy = \int_V f(\varphi(x)) |\det \varphi'(x)|\, dx}$$

L^p-Räume

Def.:

- $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \int |f(x)|^p \, dx < \infty \}$ für $p \in [1, \infty)$
- $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ meßbar $\mid \exists c < \infty : |f(x)| \leq c$ fast überall $\}$
- $\| f \|_p := \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ für $p \in [1, \infty)$
- $\| f \|_\infty := \inf \{ c \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq c$ fast überall $\}$

Bemerkungen:

- $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.
- $\lim_{p \to \infty} \| f \|_p = \| f \|_\infty$ $\forall p > q$, wenn $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$
- $\| \cdot \|_p$ ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$.

  D.h. $\forall f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}$:

  (i) $\| \alpha f \|_p = |\alpha| \, \| f \|_p$ „Homogenität"

  (ii) $\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$ „Δs-Ungl."

- (iii) $\| f \|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ „Definitheit"

  gilt nicht, nur: $\| f \|_p = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ fast überall

- Um einen normierten Raum zu erhalten bilden wir Äquivalenzklassen $f \sim g$ g.d.w. $f = g$ fast überall.

Def.: Für $p \in [1, \infty]$: $\boxed{L^p(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) / \sim}$.

Satz: $\boxed{\text{Für } p \in [1, \infty] \text{ ist } (L^p(\mathbb{R}^n), \| \cdot \|_p) \text{ ein Banachraum.}}$

= normierter Vektorraum der vollständig ist, d.h. für $\{ f_n \in L^p \}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n, m > N : \| f_n - f_m \|_p < \varepsilon \right) \Rightarrow \left(\exists f \in L^p : \lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_p = 0 \right)$$