# Analytische Fortsetzbarkeit

„Analytische Fortsetzung" hat zwei verwandte Bedeutungen:

1. **Def.:** (Analytische Fortsetzung auf größere Gebiete) Sind $f: U \to \mathbb{C}$ und $\tilde{f}: \tilde{U} \to \mathbb{C}$ holomorph und $U \subsetneq \tilde{U}$, so dass $f(z) = \tilde{f}(z)\ \forall z \in U$, dann heißt $\tilde{f}$ „analytische Fortsetzung" von $f$ auf $\tilde{U}$.

**Bemerkung:** Nach dem Identitätssatz ist $\tilde{f}$ eindeutig, wenn es existiert & $U$ einen H.P. besitzt (also z.B. wenn $U$ offen ist).

**Bsp.:** $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist holomorph auf $U := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$

$\tilde{f}(z) := \frac{1}{1-z}$ ist analytische Fortsetzung von $f$ auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

2. **Def.:** (Analytische Fortsetzung von Potenzreihen entlang von Kurven)
Sei $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$ eine Kurve und $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ konvergente Potenzreihe um $z_0 := \gamma(0)$. Dann heißt eine Familie

$$f_t(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \, (z - \gamma(t))^n, \text{ mit } t \in \{t_i\}_{i=1}^{n}, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$$

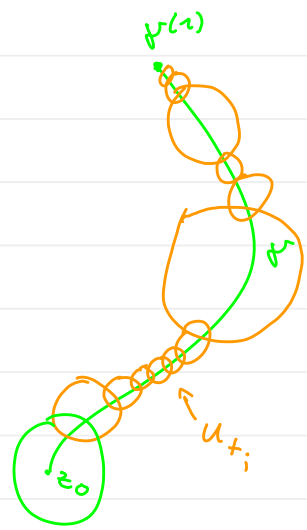
von auf den Kreisscheiben $U_{t_1}, \ldots, U_{t_n}$ konvergenten Potenzreihen „analytische Fortsetzung" von $f$ entlang $\gamma$, wenn

(0) $U_{t_i} \cap U_{t_{i+1}} \neq \emptyset$ für $\forall i$

(i) $f_0(z) = f(z) \quad \forall z \in U_{t_1}$

(ii) Die Potenzreihen lokal verträglich sind, d.h.

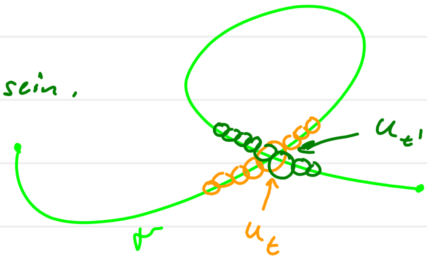
$$f_{t_i}(z) = f_{t_{i+1}}(z) \quad \forall z \in U_{t_i} \cap U_{t_{i+1}}$$



Bemerkungen: • es wird keine Verträglichkeit bei späterer Wiederkehr verlangt.

D.h. wenn $z \in U_t \cap U_{t'}$

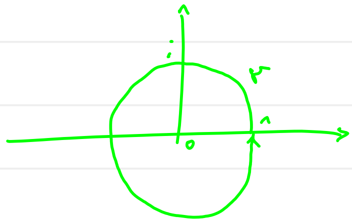
darf $f_t(z) \neq f_{t'}(z)$ sein.




• gibt es eine Fortsetzung von $f$ entlang $\gamma$, so ist diese eindeutig (Identitätssatz!)

• $f$ lässt sich entlang $\gamma$ analytisch fortsetzen genau dann wenn dies für $f'$ gilt.

Bsp.: Komplexer Logarithmus




wähle $\gamma(t) := e^{it} \quad t \in [0, \infty)$

Entwicklung um $\gamma(t)$ liefert analytische Fortsetzung entlang $\gamma$:

$$\ln(e^{it} + z) = it - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (e^{-it} z)^n \quad \text{und damit}$$

$$f_t(z) := it - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (1 - e^{-it} z)^n \quad \text{so dass}$$

$$f_0(re^{i\varphi}) = i\varphi + \ln r \quad \text{Hauptzweig}$$

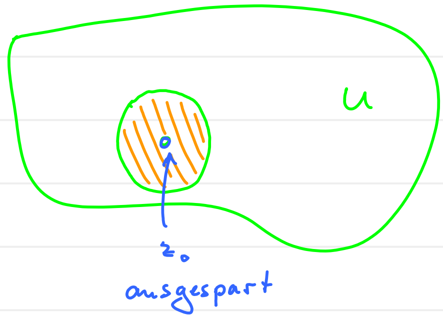
$$f_{2\pi n}(re^{i\varphi}) = (2\pi n + \varphi) i + \ln r \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \quad \text{Nebenzweige}$$

d.h. $f_{2\pi n}(z) = f_0(z) + 2\pi i n \quad \forall z : |z - 1| < 1$

um eine eindeutige Fkt. zu bekommen setzt man auf sog. „Riemannschen Blättern" fort...

# Singularitäten

**Def.:** • Sei $f$ holomorph auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$. $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ heißt „isolierte Singularität", wenn $\exists \varepsilon > 0 : \big( |z - z_0| \in (0, \varepsilon) \Rightarrow z \in U \big)$.




**Def.:** Sei $z_0$ eine isolierte Singularität von $f : U \to \mathbb{C}$. $U$ offen.

- $z_0$ heißt „hebbar", wenn $f$ eine analytische Fortsetzung auf $U \cup \{z_0\}$ besitzt.
- $z_0$ heißt „Pol", wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $z_0$ hebbare Singularität von $(z - z_0)^n f(z)$ ist. Das kleinste derartige $n$ heißt „Ordnung" des Pols.
- $z_0$ heißt „wesentliche Singularität" falls sie weder hebbar noch Pol ist.

**Bsp.:**

- $f : z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ hat als holomorphe Fkt. auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ hebbare Singularität bei $0$. Analytische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ ist $\tilde{f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} (-1)^n$
- Ist $g : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $g(z_0) \neq 0$, dann hat $f(z) := \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$ bei $z_0$ einen Pol $n$-ter Ordnung.
- $f(z) := e^{1/z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und hat bei $0$ wesentliche Singularität.

**Satz:** (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

Sei $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph mit isolierter Singularität bei $z_0$. Diese ist hebbar, wenn

$$\exists c > 0 \; \exists \varepsilon > 0 \; \left( |z - z_0| \in (0, \varepsilon) \Rightarrow |f(z)| \leq c \right)$$

(d.h. wenn $f$ in einer punktierten Umgebung beschränkt ist)

**Beweis:** Definiere $g: U \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $g(z) := \begin{cases} (z-z_0)^2 f(z), & \text{für } z \neq z_0 \\ 0 & \text{für } z = z_0 \end{cases}$

Da $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{|g(z) - g(z_0)|}{|z - z_0|} = \lim\limits_{z \to z_0} |z - z_0| |f(z)| = 0$ ist $g$ holomorph bei $z_0$

mit $g(z_0) = g'(z_0) = 0$ und deshalb $g(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

Also ist $\sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n-2}$ die analytische Fortsetzung von $f$. $\square$

D.h. wenn $f$ um eine Singularitat gutartig (im Sinne von beschränkt) ist, ist diese hebbar.

Ist die Singularität dagegen wesentlich, dann ist $f$ 'beliebig wild' in ihrer Umgebung: Nach dem Satz von Picard nimmt $f$ in jeder Umgebung um $z_0$ jeden Wert in $\mathbb{C}$ an, mit höchstens einer Ausnahme. z.B.:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \; \exists z \in \mathbb{C} : \; |z| \in (0, \varepsilon) \wedge e^{1/z} = w$$

# Laurentreihen

**Motivation:** Verallgemeinerung von Potenzreihen um holomorphe Fkt.en in der Nähe von isolierten Singularitäten beschreiben zu können.

**Def.:** Für Koeffizienten $c \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ und $z, z_0 \in \mathbb{C}$ heißen die Reihen

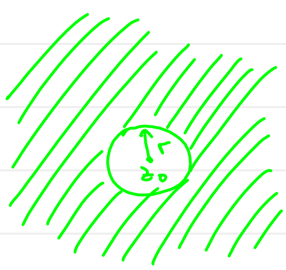
$$H := \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n} \quad \& \quad N := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

„Haupt-" und „Nebenteil" der „Laurentreihe"

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n := H + N$$

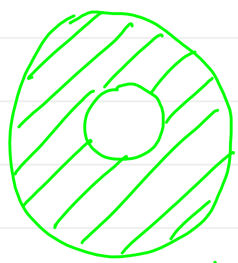
Diese heißt (absolut, gleichmäßig, ...) konvergent, falls dies für $H$ und $N$ zutrifft.

**Bemerkung:** Ist $\frac{1}{r} \in [0,\infty]$ Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n$ und $R \in [0,\infty]$ Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, dann konvergiert die Laurentreihe auf dem Kreisring $K_{r,R}(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| \in (r,R) \}$ und ist dort holomorph.



Hauptteil konvergiert

Nebenteil konvergiert


Laurentreihe konvergiert