Anmerkungen zur Konvergenz

Aus dem Potenzreihenentwicklungssatz folgt:

Korollar: Sei $f: U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und in einer offenen Umgebung um $z_0 \in U$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad (*).$$

Dann gilt für den Konvergenzradius ρ von $(*)$:

$$\rho \geq \inf_{z \in \partial U} |z-z_0| =: \operatorname{dist}(z_0, \partial U)$$

Satz (von Weierstraß): Ist die Folge $(f_n: U \to \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$ holomorph auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ und so, dass $f_n \to f$ gleichmäßig konvergiert, dann gilt:

(i) f ist holomorph,

(ii) $f_n' \to f'$ konvergiert gleichmäßig auf kompakten $K \subseteq U$.

Beweis: (i) Ist γ eine null-homotope geschlossene Kurve in U, dann gilt:

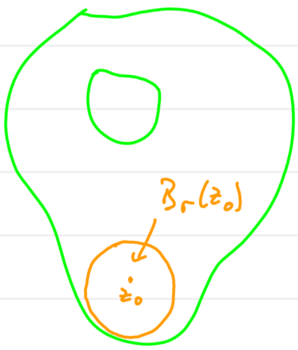
$$0 = \lim_{n\to\infty} \oint_\gamma f_n(z)\,dz \underset{\uparrow}{=} \oint_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,dz = \oint_\gamma f(z)\,dz$$

gleichmäßige Konvergenz

Satz von Morera $\Rightarrow$ f holomorph.

(ii) Wähle $z_0 \in U$ und $B_r(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| \leq r \}$, so dass $B_r(z_0) \subseteq U$. Aus der Potenzreihenentw. folgt

$$f'(z_0) = c_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz. \qquad \|g\|_K := \sup_{z\in K} |g(z)|$$



$$|f_n'(z_0) - f'(z_0)| \underset{\uparrow}{\leq} \frac{1}{r} \sup_{z \in B_r(z_0)} |f_n(z) - f(z)| \quad \forall r < \operatorname{dist}(z_0, \partial U)$$

Standardabsch.

$$\Rightarrow \quad \|f_n' - f'\|_K \leq \operatorname{dist}(K, \partial U)^{-1} \|f_n - f\|_K$$

$\square$

Bemerkung: (ii) gilt nicht für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bsp.: $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx) \to 0$ gleichm.

aber f_n' konvergiert nicht

... weitere Konsequenzen aus Cauchy's Integralsatz & -formel

Korollar: (Differentiation durch Integration):

Ist $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ und $z \in U$, $r > 0$, so dass $B_r(z) := \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - z| \leq r\} \subseteq U$. Dann ist

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi}$$

mit $\gamma(t) = z + re^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$.

Beweis: $f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\xi - z)^k \Rightarrow f^{(n)}(z) = n! \, c_n$ □

Satz (von Liouville): Ist $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt (d.h. $\exists c \in \mathbb{R} \; \forall z \in \mathbb{C}: |f(z)| \leq c$), dann ist f konstant (d.h. $\exists c' \in \mathbb{C} \; \forall z \in \mathbb{C}: f(z) = c'$).

Beweis: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \, d\xi$ wobei $\gamma_r(t) = re^{2\pi i t}$, $r > 0$.

Also gilt $|c_n| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Standardabschätzung}}}{\leq} \frac{1}{2\pi} 2\pi r \sup_{z \in \gamma_r} \frac{|f(z)|}{r^{n+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ beschränkt}}}{\leq} \frac{c}{r^n}$

Da f holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, können wir $r \to \infty$ betrachten. Also $|c_n| \leq \lim_{r \to \infty} \frac{c}{r^n} = 0$ und damit $f(z) = c_0$ □

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes Polynom $f(z) := \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ mit $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}^{n+1}$, $c_n \neq 0$ besitzt eine Nullstelle, d.h. $\exists\, z_0 \in \mathbb{C} : f(z_0) = 0$.

Beweis: Angenommen f besäße keine Nullstelle.

$g(z) := \frac{1}{z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ und f ist holomorph auf $\mathbb{C}$.

Damit wäre $z \mapsto \frac{1}{f(z)} = g\circ f(z)$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$.

Außerdem gilt $\frac{1}{f(z)} \to 0$ für $|z| \to \infty$, d.h. $\exists R \in \mathbb{R} : |z| > R \Rightarrow |f(z)| \geq |f(0)|$

und demnach
$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{1}{|f(z)|} = \sup_{|z| \leq R} \frac{1}{|f(z)|} \underset{\text{Kompaktheit + Stetigkeit}}{=} \max_{|z| \leq R} \frac{1}{|f(z)|} \underset{\text{keine Nullstelle}}{<} \infty .$$

Nach dem Satz von Liouville wäre dann $\frac{1}{f(z)} = \text{const.}$ ↯ ($c_n \neq 0$!)

□

Korollar: (Faktorzerlegung) Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}^{n+1}$ mit $c_n = 1$. Dann gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, so dass
$$\boxed{f(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)}$$

Beweis: Benutze die Identität $(z^k - \alpha^k) = (z-\alpha) \sum_{j=0}^{k-1} z^j \alpha^{k-1-j}$. (*)

Ist $f(\alpha_n) = 0$, dann gilt
$$f(z) = f(z) - f(\alpha_n) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z^k - \alpha_n^k)$$
und wegen (*) können wir einen Faktor $(z-\alpha_n)$ ausklammern, so dass
$$f(z) = (z-\alpha_n) f_{n-1}(z)$$ wobei f_{n-1} Polynom vom Grad $n-1$ ist.

Iteration mit $f_k(\alpha_k) = 0$ führt dann auf die Faktorzerlegung.

□

Nullstellen & Identitätssatz

Def.: Sei $f: U \to \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. f hat „n-fache Nullstelle" bei $z_0 \in U$, wenn $f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall k \in \{0, ..., n-1\}$ und $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Satz (Identitätssatz): Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet (:= offen und zusammenhängend) und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:

(i) $\forall z \in U: \ f(z) = 0$

(ii) $\exists V \subseteq U$ offen, so dass $f = 0$ auf V.

(iii) $\{ z \in U \mid f(z) = 0 \}$ besitzt einen Häufungspunkt in U

(iv) $\exists z_0 \in U \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \ f^{(n)}(z_0) = 0$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) ✓

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei $z_0 \in U$ dieser HP. Dann gilt in einer Umgebung $U_\varepsilon \ni z_0$:
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ und es gibt eine Folge $z_k \in U_\varepsilon \setminus \{z_0\}$ mit $z_k \to z_0$, so dass $f(z_k) = 0$.
Nach dem Satz über Koeffizientenvergleich von Potenzreihen (→ Analysis I) folgt dann $c_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ & damit $f^{(n)}(z_0) = n! \, c_n = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): $M_n := \{ z \in U \mid f^{(n)}(z) = 0 \}$, $M := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} M_n$
Da $f^{(n)}$ stetig, ist M_n abgeschlossen.
Also ist M abgeschlossen (als Durchschnitt abgesch. Mengen).
Ist $y \in M$, dann gibt es eine offene Umgebung $y \in U_\varepsilon \subseteq U$ in der $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(y)}{n!} (z-y)^n = 0$

$y \in M \Rightarrow f^{(n)}(y) = 0$

Also ist M auch offen. Da $M \neq \emptyset$ (wegen $z_0 \in M$) muß $M = U$ (weil U zusammenhängend ist). □

Korollar: Sind $f,g: U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen auf einem Gebiet U und $V \subseteq U$, so dass $f|_V = g|_V$. Dann gilt:

V besitzt einen Häufungspunkt $\Rightarrow$ $f=g$ auf ganz U.

Beweis: (iii) $\Rightarrow$ (i) aus dem Identitätssatz angewendet auf $f-g$. $\square$

Korollar: (Isoliertheit der Nullstellen)
Ist $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ und verschieden von der Nullfunktion. Dann gilt

$$f(z_0) = 0 \;\Rightarrow\; \exists \varepsilon > 0 : \left(0 < |z - z_0| < \varepsilon \Rightarrow f(z) \neq 0 \right)$$

Beweis: gäbe es so ein $\varepsilon > 0$ nicht, dann wäre z_0 Häufungspunkt der Nullstellenmenge & (iii) $\Rightarrow$ (i) widerspräche $f \neq 0$ $\square$

Einfache Anwendung des Identitätssatzes: Fortsetzung von Identitäten von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$. z.B.: $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = ?$ für $z \in \mathbb{C}$

Wir wissen: $f(z) := (\sin z)^2 + (\cos z)^2$ ist auf $\mathbb{C}$ holomorph und stimmt auf $\mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(z) := 1$ überein.

Da auch $\tilde{f}$ auf $\mathbb{C}$ holomorph ist, muß $\tilde{f}(z) = f(z) = 1 \; \forall z \in \mathbb{C}$.