

FOURIERTRANSFORMATION

Def.: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die „Fouriertransformierte“ $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definiert als

$$\hat{f}(k) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} f(x) dx \quad , \text{ wobei } k \cdot x := \sum_{l=1}^n k_l x_l$$

- Bemerkungen:
- mit f ist auch $x \mapsto e^{-ikx} f(x)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, so dass das Integral existiert.
 - für die „ 2π “-Vorfaktoren gibt es unterschiedliche Konventionen (sowohl vor dem Integral als auch im Exponenten)
 - Die „Fouriertransformation“ $f \mapsto \hat{f}$ ist oft ein Übergang der Art
Zeit-Domäne \rightarrow Frequenzraum
Ortsraum \rightarrow „k-Raum“ / Impulsraum

Korollar (Elementare Eigenschaften der F.T.):

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in (0, \infty)$, Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & f \mapsto \hat{f} \text{ ist linear in } f \\ \text{(ii)} \quad & g(x) = f(x-h) \Rightarrow \hat{g}(k) = e^{-ik \cdot h} \hat{f}(k) \\ \text{(iii)} \quad & g(x) = e^{ih \cdot x} f(x) \Rightarrow \hat{g}(k) = \hat{f}(k-h) \\ \text{(iv)} \quad & g(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \hat{g}(k) = \lambda^n \hat{f}(\lambda k) \end{aligned}$$

Beweis: (i) folgt aus Linearität des Integrals

$$\text{(ii)} \quad \int e^{-ik \cdot x} f(x-h) dx = \int e^{-ik \cdot h} e^{-ik \cdot y} f(y) dy$$

\uparrow
 $y = x-h$

$$\text{(iii)} \quad \int e^{ih \cdot x} e^{-ik \cdot x} f(x) dx = \int e^{-i(k-h) \cdot x} f(x) dx$$

$$\text{(iv)} \quad \int e^{-ik \cdot x} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \lambda^n \int e^{-i\lambda k \cdot y} f(y) dy$$

\uparrow
 $y = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \frac{\partial x_j}{\partial y_l} = \delta_{jl} \lambda$

□

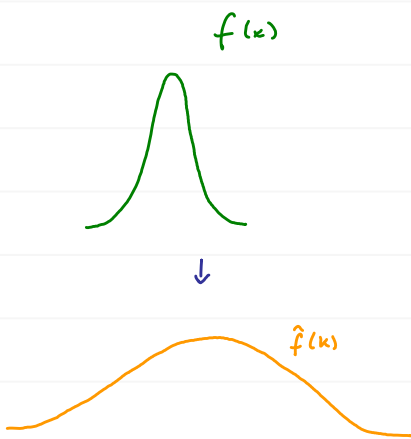
Bsp. 1: Für $f(x) = \exp[-\frac{1}{2} x \cdot A x]$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit ist

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \exp[-\frac{1}{2} k \cdot A^{-1} k]$$

Beweis: zunächst $n=1$; $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx - \frac{1}{2} a x^2} dx$

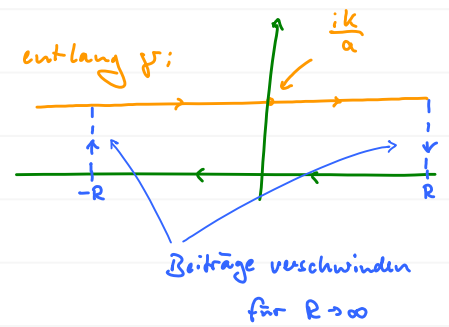
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{a}{2} \left(x + \frac{ik}{a}\right)^2] dx e^{-\frac{k^2}{2a}}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{k^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{a}{2} z^2] dz$$



Komplexes Wegintegral entlang γ :

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{k^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2} x^2} dx = \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{\pi}$$



$$= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{k^2}{2a}}$$

Für $n > 1$ diagonalisieren wir $A = U^T \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \dots & \\ & & a_n \end{pmatrix} U$ wobei $a_i > 0$ & $|\det(U)| = 1$ und verwenden den Transformationssatz für $x \mapsto f(x) = Ux$. Dann ist

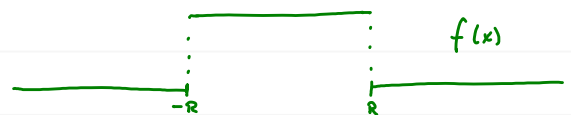
$$\hat{f}(k) = \prod_{l=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(Uk)_l x_l - \frac{1}{2} a_l x_l^2} dx_l = \prod_{l=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_l}} e^{-\frac{(Uk)_l^2}{2a_l}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \exp[-\frac{1}{2} k \cdot A^{-1} k]$$

□

Bsp. 2: $n=1, R > 0, f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(Rk)}{k}$$



Beweis: $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-R}^R e^{-ikx} dx = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{-ik} e^{-ikx} \right]_{-R}^R$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2 \frac{e^{ikR} - e^{-ikR}}{2ik} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(Rk)}{k}$$

□

Bemerkung: $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ ist nicht absolut integrierbar. D.h.

$$f \in L^1 \not\Rightarrow \hat{f} \in L^1 \quad \text{aber es gilt } \hat{f} \in L^\infty:$$

Satz: Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt:

- (i) \hat{f} ist stetig
- (ii) \hat{f} ist beschränkt mit $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 (2\pi)^{-n/2}$
 $\forall x: f(x) \geq 0 \Rightarrow \|\hat{f}\|_\infty = \|f\|_1 (2\pi)^{-n/2} = \hat{f}(0)$
- (iii) $\lim_{\|k\| \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0$

Beweis: (i) Wähle eine bel. Folge $k_n \rightarrow k$. Dann ist

$$|\hat{f}(k_n) - \hat{f}(k)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \underbrace{|e^{-ik_n x} - e^{-ikx}|}_{=: g_n(x)} dx$$

Da $|g_n(x)| \leq 2|f(x)|$, folgt aus dem Satz über majorisierte Konvergenz, dass $\hat{f}(k_n) \rightarrow \hat{f}(k)$ wegen $g_n \rightarrow 0$ f.ü. für $n \rightarrow \infty$.

$$(ii) \quad \|\hat{f}\|_\infty \stackrel{(i)}{=} \sup_k |\hat{f}(k)| = \sup_k \left| (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} f(x) dx \right|$$

$$\stackrel{'' = '' \text{ für } k=0, f \geq 0}{\leq} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1$$

$$(iii) \quad \underline{\text{Skizze:}} \quad \hat{f}(k) \stackrel{-1 = e^{i\pi}}{\downarrow} = - (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik \cdot \left(x - \frac{\pi k}{\|k\|^2}\right)} dx$$

$$= - (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f\left(y + \frac{\pi k}{\|k\|^2}\right) e^{-ik \cdot y} dy$$

Damit ist
$$2\hat{f}(k) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi k}{\|k\|^2}\right) \right)}_{=: f_k(x)} e^{-ik \cdot x} dx, \text{ also}$$

$$2|\hat{f}(k)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f - f_k\|_1 \rightarrow 0 \text{ für } \|k\| \rightarrow \infty \quad \square$$

↑
wäre noch z.z.

Satz: Sei $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$. Dann ist

$$\widehat{\partial^\alpha f}(k) = i^{|\alpha|} k^\alpha \hat{f}(k)$$

wobei $|\alpha| := \sum_{l=1}^n \alpha_l$, $k^\alpha := \prod_{l=1}^n k_l^{\alpha_l}$, $\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

Beweis für $n=m=1$; ($m>1$ folgt mittels Induktion & $n>1$ mittels part. Int.)

$$\begin{aligned} \hat{f}'(k) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f'(x) dx \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{\downarrow} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[e^{-ikx} f(x) \right]_{-\infty}^{\infty} + ik \hat{f}(k) \end{aligned}$$

Da $f' \in L^1$, existiert $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = f(0) + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_0^x f'(y) dy$

und wegen $f \in L^1$ gilt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ □

Satz: Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $m \in \mathbb{N}$. Falls $x \mapsto x^\alpha f(x)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, dann gilt:

$$\hat{f} \in C^m(\mathbb{R}^n) \text{ und } \partial^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f(x)}$$

Beweis für $n=m=1$:
$$\frac{\hat{f}(k+\Delta) - \hat{f}(k)}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{-ix\Delta} - 1)}{\Delta} e^{-ikx} f(x) dx$$

Da $|k| \geq \left| \frac{e^{-ix\Delta} - 1}{\Delta} \right|$ & $x \mapsto xf(x)$ in L^1 ist, folgt aus dem Satz über majorisierte Konvergenz:

$$\hat{f}'(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-ix\Delta} - 1}{\Delta} \right) e^{-ikx} f(x) dx = -i \hat{g}(k)$$

wobei $g(x) = xf(x)$. \square