



## Aufgaben

### 1. Zirkulation eines Vektorfeldes

Es bezeichne  $K_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - a| \leq r\}$  die Kreisscheibe mit Radius  $r$  um den Punkt  $a \in \mathbb{R}^2$ . Sei nun

$$M := K_7(0, 0) \setminus (K_2(0, -4) \cup K_1(0, 0) \cup K_1(-3, 3) \cup K_1(3, 3)).$$

Berechnen Sie das Wegintegral des Vektorfeldes

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 2y + x^2 \sin(x) \\ \tanh(y) + 3x \end{pmatrix}$$

entlang des positiv orientierten Randes von  $M$ .

### 2. Residuen

Gegeben ist die Funktion  $f(z) = \frac{z}{\sin z}$ .

- Geben Sie alle Singularitäten von  $f$  an und klassifizieren Sie diese.
- Bestimmen Sie die Werte aller Residuen von  $f$ .
- Berechnen Sie  $\int_{|z-\pi|=4} f(z) dz$ .
- Für welche  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert die Laurent-Reihe von  $f$  im Entwicklungspunkt 0?

### 3. Fouriertransformation

Berechnen Sie die Fouriertransformation von  $f(x) = \frac{1}{(x+i)^2}$  und den Wert des Integrals  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$ .

### 4. Hilbertraum

Sei  $(x_n)$  eine orthogonale Folge in einem Hilbertraum  $H$ , d.h.  $\langle x_n, x_m \rangle = 0$  für  $n \neq m$ .

- Zeigen Sie: Ist die Folge  $(x_n)$  konvergent, so ist ihr Grenzwert 0.
- Zeigen Sie: Ist  $(x_n)$  orthonormal, so ist  $(x_n)$  nicht konvergent.
- Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine orthogonale Folge  $(x_n)$  an mit  $x_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_n \rightarrow 0$ .
- Gilt (a) auch in einem Prähilbertraum?
- Gilt (b) auch in einem Prähilbertraum?

**Abgabe der Aufgaben:** Freitag 8.2.2013, bis 17:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude  
Die Aufgaben werden nicht korrigiert sondern gegebenenfalls als sinnvoll bearbeitet gewertet.