Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

**Mathematik für Physiker 4**
**(Analysis 3)**

Wintersem. 2012/13
Blatt 10
(20.12.2012)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2012W

## Hausaufgaben

### 10.1. Lebesgue-Integral und Riemann-Integral

(a) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}_0^+$ stetig differenzierbar, $f' < 0$ und $f(1) = 0$.

  (i) Zeigen Sie, dass $F(y) := \mu(\{x \in [0,1] \,|\, f(x) > y\})$ für $y \in [0, f(0)]$ die Umkehrfunktion von $f$ ist.

  (ii) Beweisen Sie elementar, dass $\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^\infty F(y)dy$.

(b) Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ messbar mit kompaktem Träger und $f(\mathbb{R}^n) = \{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$, $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k$, $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \sum_{j=1}^{k} a_j \mu(f^{-1}(\{a_j\})).$$

### 10.2. Beispiele und Gegenbeispiele zur majorisierten Konvergenz

(a) Sei $f(z) = \frac{e^{ikz}}{z}$, $k > 0$ und $\gamma_r(t) = r\, e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Zeigen Sie $\lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_{\gamma_r} f(z)dz = 0$ mit Hilfe der majorisierten Konvergenz.

(b) Geben Sie eine monoton fallende Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ an, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, d.h., für die $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \geq 0$ gilt, aber

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty f_n(x)dx \neq \int\limits_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Hinweis: Warum müssen die $f_n$ so gewählt werden, dass $\int\limits_0^\infty f_n(x)dx = \infty$ ?

(c) Geben Sie eine Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\int\limits_0^\infty f_n(x)dx = 1$ an, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. Warum ist dies kein Widerspruch zur majorisierten Konvergenz? Hinweis: Wählen Sie z.B. $f_n(x) = a_n \chi_{I_n}(x)$ mit $a_n > 0$ und geeigneten Intervallen $I_n$.

### 10.3. Majorisierte Konvergenz für Reihen

Wir betrachten $\mathbb{N}_0$ mit dem Zählmaß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \to [0, \infty]$, $\mu(\{n\}) = 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Was besagt der Satz von der majorisierten Konvergenz bezüglich des Zählmaßes für Folgen in $\mathbb{C}$?

(b) Beweisen Sie den Satz von der majorisierten Konvergenz für Reihen elementar.

(c) Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n = e^z$ für $z \in \mathbb{C}$.

**Abgabe der Hausaufgaben:** 14.1.2013, bis 12:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude

**Wir wünschen Ihnen ein frohes Fest und ein gutes neues Jahr 2013!**