TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2012W

Wintersem. 2012/13
Blatt 9
(13.12.2012)

Hausaufgaben

9.1. Die Besselfunktionen

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ besitzt die Funktion $f_z(w) = e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})}$ auf $\mathbb{C}^\times$ eine Laurententwicklung

$$e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z)w^n$$

$J_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt die n-te Besselfunktion. Man zeige

(a) Für $n \geq 0$ ist $J_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$.

(b) $J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos(z\sin t - nt)dt$.

Hinweis: Man benutze die Integraldarstellung der Laurentkoeffizienten; in (b) durch geeignetes Einsetzen von Exponentialreihen; in (c) durch Auswerten entlang der Einheitskreislinie.

9.2. Berechnung von Integralen

Berechnen und skizzieren Sie für die Fälle $b > 0$ und $b < 0$ den Imaginärteil der Funktion

$$G_b(k) = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} \frac{e^{-ikx}}{x+ib}dx.$$

9.4. Cauchyscher Hauptwert

Wir berechnen das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ mit Hilfe des Cauchyschen Hauptwertes. (Warum existiert es im uneigentlichen Riemann-Sinne?)

(a) Zeigen Sie $\frac{\sin^2 x}{x^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{2ix}}{2x^2}\right)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \mathrm{Re}\left(\lim\limits_{r\to\infty} \mathcal{P}\!\!\int\limits_{-r}^{r} \frac{1-e^{2ix}}{2x^2}dx\right)$.

9.5. Die Komposition von harmonischer und holomorpher Funktion ist harmonisch

Beweisen Sie das Lemma aus der Vorlesung:
Ist $u : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ harmonisch und $f : V \subseteq \mathbb{C} \to U$ holomorph, so ist $u \circ f : V \to \mathbb{R}$ harmonisch.

Abgabe der Hausaufgaben: 7.1.2013, bis 12:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude