Hausaufgaben

7.1. Anwendungen des Identitätssatzes

Gibt es im Ursprung holomorphe Funktionen f, für die jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n}$, (b) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2-2}$, (c) $f^{(n)}(0) = (n!)^2$?

7.2. Anwendung des Satzes von Liouville

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Man zeige $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$, d.h. das Bild von f liegt dicht in $\mathbb{C}$. Man gebe ein Beispiel mit $f(\mathbb{C}) \neq \mathbb{C}$.
Hinweis: Unter der Annahme $a \notin \overline{f(\mathbb{C})}$ betrachte man $z \mapsto \frac{1}{f(z)-a}$.

7.3. Die allgemeine Potenz und ihre Reihenentwicklung

Für $z \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ ist die allgemeine Potenz definiert als

$$z^\alpha := e^{\alpha \ln z},$$

wobei $\ln(re^{i\phi}) := i\phi + \ln r$ für $r > 0$, $\phi \in]-\pi, \pi]$, der auf $C^\times$ (unstetig) fortgesetzte Hauptzweig des Logarithmus ist. (Für $\alpha \in \mathbb{Z}$ stimmt diese Definition mit der schon definierten ganzzahligen Potenz von z überein.)

(a) Man zeige $\frac{d}{dz} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}$ für $z \in \mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.

(b) Für $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ist z^α auf $\mathbb{R}^-$ nicht stetig.
Hinweis: Man betrachte die Kurve $\gamma(t) = re^{i(\pi+t)}$ bei $t = 0$.

(c) Man zeige: Für $|z| < 1$ gilt mit $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha-1}{2} \cdots \frac{\alpha-k+1}{k}$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k.$$

Hinweis: Man berechne die Ableitungen von $f(z) = (1+z)^\alpha$ im Ursprung.

(d) Sei $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}^-$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt die verallgemeinerte binomische Formel

$$(z_0+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z_0^{\alpha-k} z^k?$$

Hinweis: Bestimmen Sie wieder alle Ableitungen bei $z = 0$.

7.4. Nullstellen und Pole holomorpher Funktionen

Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$.

(a) Zeigen Sie:

f hat bei z_0 eine n–fache Nullstelle $\iff$ $\dfrac{1}{f}$ hat bei z_0 einen Pol n–ter Ordnung.

(b) Besitzt g eine einfache Nullstelle in z_0, dann hat $\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{c}{z-z_0}$ eine hebbare Singularität in z_0 für $c = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$.

Abgabe der Hausaufgaben: 10.12.2012, bis 12:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude