TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2012W

Wintersem. 2012/13
Blatt 6
(22.11.2012)

Hausaufgaben

6.1. Erweiterung zu einer holomorphen Funktion

Gibt es eine holomorphe Funktion $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ auf $\mathbb{C}$ mit

(a) $f(x) = x \sin x^6$ für $x \in \mathbb{R}$,

(b) $u(x,y) = x^2 + y^2$ für $x, y \in \mathbb{R}$,

(c) $u(x,y) = x^2 - y^2 + y$ für $x, y \in \mathbb{R}$?

6.2. Komplexe Wegintegrale

(a) Berechnen Sie explizit $\int\limits_\gamma z^n dz$ für $\gamma(t) = (1-t)a + tb$, $t \in [0,1]$, $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Sei $G = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$. Konstruieren Sie einen Weg γ entlang ∂G und berechnen Sie $\int_\gamma \bar{z}\, dz$, $\int_\gamma \frac{dz}{z+1}$, $\int_\gamma z\bar{z}\, dz$.

(c) Sei $p(z)$ ein komplexes Polynom, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Man zeige $\int\limits_{|z-a|=r} \overline{p(z)} dz = 2\pi i r^2 \overline{p'(a)}$.

6.3. Die komplexe Errorfunktion und Fresnel-Integrale

Die komplexe Errorfunktion ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert als

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-w^2} dw.$$

Hinweis: Für $x \in \mathbb{R}$ hat $\operatorname{erf}(x)$ die bekannte Asymptotik $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{erf}(x) = \pm 1$.

(a) Skizzieren Sie die Linien konstanten Betrags und konstanter Phase von $\mathbb{C} \ni z \mapsto e^{-z^2}$.

(b) Warum ist erf holomorph auf $\mathbb{C}$? Man gebe $\operatorname{erf}(z)$ als Potenzreihe an und zeige $\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z)$ und $\operatorname{erf}(\overline{z}) = \overline{\operatorname{erf}(z)}$.

(c) Sei $c = 1 + i\alpha$, $\alpha \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{erf}(xc) = 1$ ist.
Hinweis: Man schätze das Kurvenintegral entlang $\tilde{\gamma}(y) = x + iy$, $y \in [0, \alpha x]$ durch $\frac{1}{x}$ ab in dem man an geeigneter Stelle $y^2 \leq xy$ benutzt.

(d) Berechnen Sie $\int\limits_0^\infty \cos x^2 dx$ und $\int\limits_0^\infty \sin x^2 dx$ unter Benutzung von (c) mit $\alpha = 1$.

Abgabe der Hausaufgaben: 3.12.2012, bis 12:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude