TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

Wintersem. 2012/13
Blatt 4
(8.11.2012)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2012W

Hausaufgaben

4.1. Satz von Gauß für den Würfel

Beweisen Sie elementar den Satz von Gauß für den Würfel $W = [0,1]^n$ und ein stetig differenzierbares Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\int\limits_{\partial W} \langle F(x), v(x)\rangle dS(x) = \int\limits_{W} \operatorname{div} F(x) d^n x.$$

4.2. Oberflächenintegrale von Vektorfeldern

Gegeben seien der Kegel $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 2 - 2\sqrt{x^2+y^2}\}$ und die Halbkugel $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1 \wedge z \leq 0\}$. Integrieren Sie das Vektorfeld F über ∂K und über ∂H jeweils explizit duch Auswerten der Oberflächenintegrale und $\operatorname{div} F$ über K und H für

(a) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y \\ xz \\ x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix}$,

(b) $F(x,y,z) = \operatorname{rot} G(x,y,z)$, $G(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y \\ xz \\ x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix}$.

In (b) berechne man noch das Wegintegral von G entlang der Einheitskreislinie in der xy-Ebene.

4.3. Anwendung der mehrdimensionalen partiellen Integration

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt mit glattem Rand und $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein divergenzfreies Vektorfeld, das tangential zu ∂A verläuft, d.h., $\langle F(x), v(x)\rangle = 0$ für $x \in \partial A$. Zeigen Sie, dass für alle $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ gilt

$$\int\limits_{A} \langle F(x), \operatorname{grad} f(x)\rangle d^3x = 0.$$

Hinweis: Adaptieren Sie den Beweis der ersten Greenschen Formel.

Abgabe der Hausaufgaben: 19.11.2012, bis 12:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude