PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

Wintersem. 2012/13
Blatt 3
(1.11.2012)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2012W

Hausaufgaben

Erratum Blatt 2, Aufgabe 2.2(b): Der Integrand sollte $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ lauten.

3.1. Gegenbeispiel zu Fubini, Transformationssatz

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y+2)^3}$ auf $Q := (\mathbb{R}_0^+)^2$. Versuchen Sie $\int\limits_Q f(x)d^2x$ einmal in kartesischen und in Polarkoordinaten zu berechnen. Wenn Sie unterschiedliche Ergebnisse bekommen, erklären Sie dies.
HINWEIS: $\frac{\partial}{\partial y}\frac{y+1}{(x+y+2)^2} = \frac{x-y}{(x+y+2)^3}$, Substitution $\phi \mapsto \frac{\pi}{2} - \phi$.

3.2. Oberfläche des Torus im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$

(a) Berechnen Sie den zweidimensionalen Flächeninhalt des Torus im $\mathbb{R}^4$,

$$T = \{v^2 + x^2 = R^2 \wedge y^2 + z^2 = r^2\} \subseteq \mathbb{R}^4, \quad r, R > 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt einer Rotationsfläche

$$F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in \gamma(I)\},$$

wobei $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ eine injektive stetig differenzierbare Kurve ist, gegeben ist durch

$$\mathrm{vol}_2(F) = 2\pi \int\limits_I \gamma_1(t)\|\dot{\gamma}(t)\|dt.$$

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Torus im $\mathbb{R}^3$,

$$\tilde{T} = \{(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\} \subseteq \mathbb{R}^3, \quad 0 < r < R.$$

3.3. Flächeninhalt der d-dimensionalen Sphäre

(a) Man zeige für $a \in \mathbb{R}^n$: $\det(E + aa^{\mathrm{T}}) = 1 + \|a\|^2$.
HINWEIS: Man ergänze $\frac{a}{\|a\|}$ zu einer ONB und rechne in dieser Basis.

(b) Flächeninhalt eines Graphen. Sei $f : V \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen mit $\partial V = 0$. Man zeige für den Graphen von f, $G_f \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$:

$$\mathrm{vol}_m(G_f) = \int\limits_V \sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|^2} d^m x.$$

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der d–Sphäre $S^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} | \|x\| = 1\}$ mit Hilfe des Graphen von $f(y) = \sqrt{1 - \|y\|^2}$, $y \in \mathbb{R}^d$, $\|y\| < 1$.
HINWEIS: $\int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \pi$ für $a > 0$ und Aufgabe 2.1.

Abgabe der Hausaufgaben: 12.11.2012, bis 12:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude