Riemann-Integration im $\mathbb{R}^n$ & Mengen vom Maß Null

Def.: • Wir nennen $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ einen „Quader" wenn es $a, b \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

• Praktische Kurzschreibweise: $Q =: [[a,b]]$

• Das „Volumen" eines Quaders ist $\mathrm{vol}(Q) := \prod_{i=1}^{n} |b_i - a_i|$

Erinnerung: Bisher können wir stetige Fkt.en auf Quadern integrieren.

Für $f \in C(Q, \mathbb{R})$ haben wir

$$\int_Q f(x)\,dx := \int_{[a_1,b_1]} \dots \int_{[a_n,b_n]} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

unabh. von der Integrationsreihenfolge (Satz von Fubini).

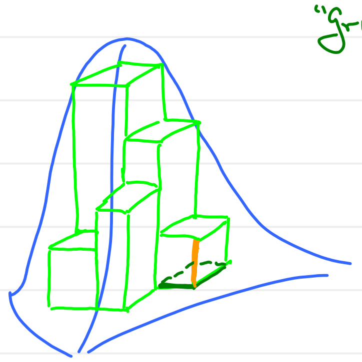
Für allgemeinere Fkt.en $f: Q \to \mathbb{R}$ betrachten wir Zerlegungen $Z := \{Q_1, \dots, Q_m\}$ von $Q = \bigcup_{\alpha=1}^{m} Q_\alpha$ in kleinere Quader Q_α, für die gilt $\alpha \neq \beta \Rightarrow Q_\alpha^\circ \cap Q_\beta^\circ = \emptyset$.

Wir definieren die Ober-/Untersumme

$$\overline{S}_Z(f) := \sum_{\alpha=1}^{m} \mathrm{vol}(Q_\alpha) \sup\{f(x) \mid x \in Q_\alpha\}$$

$$\underline{S}_Z(f) := \sum_{\alpha=1}^{m} \mathrm{vol}(Q_\alpha) \inf\{f(x) \mid x \in Q_\alpha\}$$

"Grundfläche" × "Höhe"



Def.: Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt, dann heißt f „Riemann-integrierbar" auf Q, wenn

$$\inf\{\, \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \mid Z \,\} = 0$$

Das „Riemann-Integral" ist dann definiert durch

$$\int_Q f(x)\,dx := \inf \overline{S}_Z(f)$$

Bemerkung:
- Ist $f: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, dann gilt auch $\int_Q f(x)\,dx = \sup \underline{S}_Z(f)$ und das Integral kann als „Volumen" unter dem Graphen interpretiert werden.

Wir wollen alle auf Q Riemann-integrierbaren Funktionen charakterisieren. Dazu hilft es, wesentliche von unwesentlichen Mengen unterscheiden zu können:

Def.:
- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt „Menge vom Lebesgue-Maß Null in $\mathbb{R}^n$", wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele Quader $Q_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} Q_\alpha \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \mathrm{vol}(Q_\alpha) < \varepsilon \,.$$

(später mehr zum Lebesgue-Maß ...)

Bemerkungen:
- wir dürfen in der Def. die Q_α's o.B.d.A. durch offene Mengen der Form $\mathring{Q}_\alpha$ ersetzen (durch „Aufblähen" der Quader um einen konstanten Faktor).

Bemerkungen:

- oft spricht man einfach von „Nullmenge" oder „Menge vom Maß Null".
- Ist $S \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass $Q \in S$ für einen Quader mit $\mathrm{vol}(Q) \neq 0$, und $A : S \to \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ (d.h. A ist ein „Prädikat") dann nennt man A „<u>fast überall</u>" wahr, wenn $\{ x \in S \mid \neg A(x) \}$ eine Menge vom Lebesgue-Maß Null ist.

Lemma: Sind $M_j \subseteq \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, Mengen vom Lebesgue-Maß Null in $\mathbb{R}^n$, dann gilt dies auch für $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j$.

Beweis: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es Quader $Q_{\alpha,j} \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass

$$M_j \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} Q_{\alpha,j} \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \mathrm{vol}(Q_{\alpha,j}) < \varepsilon 2^{-j} .$$

Für jede Abzählung der $Q_{\alpha,j}$ gilt damit

$$\sum_{\alpha,j} \mathrm{vol}(Q_{\alpha,j}) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \varepsilon 2^{-j} = \varepsilon \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \right) = \varepsilon \qquad \square$$

Korollar & Bsp.: $\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ist vom Lebesgue-Maß Null in $\mathbb{R}^n$.

Beweis: $\mathbb{Q}^n$ ist abzählbar & $\forall x \in \mathbb{Q}^n$ ist $\{x\} \subseteq \mathbb{R}^n$ Nullmenge. $\square$

Korollar & Bsp.:

> Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar, dann ist der Graph
>
> $$G := \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in Q \}$$
>
> vom Lebesgue-Maß Null in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z = \{Q_\alpha\}$,

so dass $\sum_{Q_\alpha \in Z} \mathrm{vol}(Q_\alpha)\left[\sup f(Q_\alpha) - \inf f(Q_\alpha)\right] < \varepsilon$.

$\tilde{Q}_\alpha := Q_\alpha \times [\inf f(Q_\alpha), \sup f(Q_\alpha)] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

erfüllt damit $G \subseteq \bigcup_\alpha \tilde{Q}_\alpha$ und $\sum_\alpha \mathrm{vol}(\tilde{Q}_\alpha) < \varepsilon$. $\square$

Satz: (Lebesgue'sches Integrabilitätskriterium)

$\boxed{\text{Eine beschränkte Funktion } f: Q \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ auf einem Quader } Q \text{ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie fast überall stetig ist.}}$

Beweis: (nur "$\Leftarrow$") $M := \{x \in Q \mid f(x) \text{ unstetig}\}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es

Quader $\{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ mit $M \subseteq \bigcup_j R_j^\circ$ und $\sum_j \mathrm{vol}(R_j) < \varepsilon$.

Zu jedem $x \in Q \setminus M$ gibt es einen Quader S_x mit $x \in S_x^\circ$ und

$$\forall x', x'' \in S_x^\circ \cap Q : \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon .$$

Aus Kompaktheit von Q folgt, dass es zur offenen Überdeckung

$Q \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j^\circ \cup \bigcup_{x \in Q \setminus M} S_x^\circ$ eine endl. Überdeckung

$Q \subseteq \bigcup_{j \in A} R_j^\circ \cup \bigcup_{x \in B} S_x^\circ$ gibt.

Wähle nun eine Zerlegung $\{Q_\alpha\}$, so dass für jedes α gilt:

$$\left(\exists_{j \in A} : Q_\alpha \subseteq R_j\right) \vee \left(\exists x \in B : Q_\alpha \subseteq S_x\right)$$

Dann ist $\sum_\alpha \mathrm{vol}(Q_\alpha)\left[\sup(f(Q_\alpha)) - \inf(f(Q_\alpha))\right]$

$$= \underbrace{\sum_{\text{"}\alpha\in A\text{"}} \dots}_{\text{unstetiger}} + \underbrace{\sum_{\text{"}\alpha\in B\text{"}} \dots}_{\text{stetiger Teil}}$$

$$\leq 2\|f\|_\infty \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{Q_\alpha\subseteq R_j} \mathrm{vol}(Q_\alpha) + \sum_{\text{"}\alpha\in B\text{"}} \varepsilon\, \mathrm{vol}(Q_\alpha)$$

$$\leq 2\|f\|_\infty\, \varepsilon + \varepsilon\, \mathrm{vol}(Q) = \varepsilon\left(2\|f\|_\infty + \mathrm{vol}(Q)\right)$$

$\square$

Folgerungen:

- Die „Dirichlet-Fkt." $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ ist nicht Riemann integrierbar, da die Menge $\{x\in[0,1] \mid f(x) \text{ unstetig}\} = [0,1]$ nicht vom Maß 0 ist.
- Damit ist die Klasse der Riemann-integrablen Fkt.en nicht abgeschlossen unter Limiten, da wir die Dirichlet Fkt. schreiben können als $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos(m!\,\pi x)\right)^{2n}$
- Abgeschlossenheit unter unendl. Summen gilt ebensowenig.

(all dies wird später mit dem Lebesgue-Integral kuriert)

Satz: (Fubini) Sind $Q_1\subseteq\mathbb{R}^{n_1}$, $Q_2\subseteq\mathbb{R}^{n_2}$, $Q := Q_1\times Q_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ Quader, $f: Q\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und existiert für jedes $x_2\in Q_2$ das Integral $\int_{Q_1} f(x_1,x_2)\,dx_1 =: g(x_2)$, dann ist g auf Q_2 Riemann-integrierbar und es gilt

$$\boxed{\int_Q f(x)\,dx = \int_{Q_2} g(x_2)\,dx_2 = \int_{Q_2}\left(\int_{Q_1} f(x_1,x_2)\,dx_1\right)dx_2}$$

Folgerung: Wenn alle Integrale existieren (!) dürfen wir die Integrationsreihenfolge also wieder vertauschen.

Def.: $f: A \to \mathbb{R}$ heißt „Riemann-integrierbar" auf einer beschränkten Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn das Riemann-Integral

$$\int_Q \tilde{f}(x)\,dx =: \int_A f(x)\,dx$$

existiert, wobei $Q \supseteq A$ ein Quader ist, und $\tilde{f}: Q \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$.

Bemerkung: Das Lebesgue-Kriterium garantiert, dass die Wahl von Q keine Rolle spielt.

Satz: Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und ∂A vom Lebesgue-Maß Null in $\mathbb{R}^n$, dann ist eine beschränkte Fkt. $f: A \to \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar, wenn f auf A fast überall stetig ist.

Beweis: $\{x \in Q \mid \tilde{f}(x) \text{ unstetig}\} \subseteq \{x \in A \mid f(x) \text{ unstetig}\} \cup \partial A$, so dass die Aussage aus dem Lebesgue-Kriterium folgt. $\square$

Rechenregeln für Riemann-integrierbare Funktionen:

- $\int_A (f(x) + g(x))\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_A g(x)\,dx$
- $c\int_A f(x)\,dx = \int c f(x)\,dx$ für $c \in \mathbb{R}$

d.h. integrierbare Fkt.en bilden einen Vektorraum

- $\left|\int_A f(x)\,dx\right| \leq \int_A |f(x)|\,dx$ $\quad$ Δ-Ungleichung
- $\int_A f(x)\,dx = 0$ wenn A vom Lebesgue-Maß Null ist.
- für $f: A \to \mathbb{C}^n$ ist $\int_A f(x)\,dx$ komponentenweise zu betrachten.
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \int_{A \cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$

Def.: Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert $\int_A dx =: \mathrm{vol}(A)$ das „<u>n-dim. Volumen</u>" (kurz „Volumen") von A, falls das Integral existiert.

Ein weiteres nützliches Werkzeug ist eine Version des Satzes von Fubini für sog. „Normalbereiche":

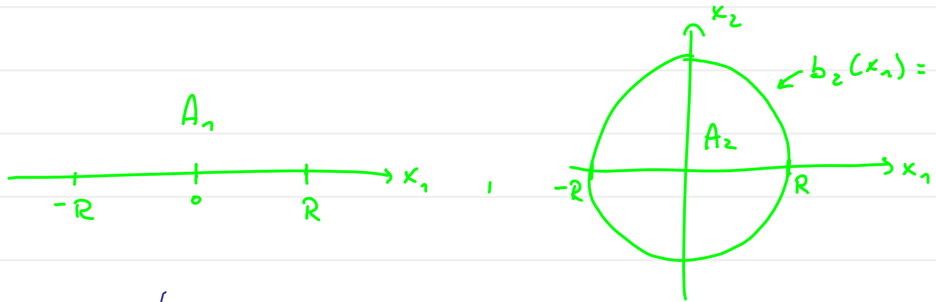
Def.: Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt „<u>Normalbereich</u>", wenn sie wie folgt konstruiert ist:

$$A_1 := [a_1, b_1] \subseteq \mathbb{R}$$
$$A_k := \left\{ (x,y) \in A_{k-1} \times \mathbb{R} \,\middle|\, a_k(x) \leq y \leq b_k(x) \right\} \subseteq \mathbb{R}^k$$
$$\text{mit } a_k, b_k \in C(A_{k-1}) \quad \text{für } k = 2, \ldots, n$$
$$A := A_n$$

Bemerkung: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Normalbereich $\Rightarrow$
- ∂A ist vom Lebesgue-Maß Null in $\mathbb{R}^n$
- A ist kompakt

Bsp.: <u>Kugel</u> $B_R(0)$:

$$A_1 = [-R, R]$$
$$b_k(x) = -a_k(x) = \sqrt{R^2 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2}$$



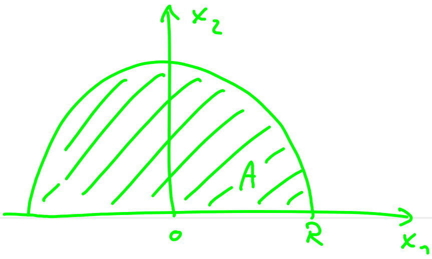
$, \ldots, \quad A_n = B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^n$

Satz: (Fubini für Normalbereiche)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Normalbereich und $f: A \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

Dann gilt
$$\int_A f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{a_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1,\ldots,x_n)\, dx_n \ldots dx_1,$$
wenn alle Integrale existieren.

Beweis: beruht auf Fubini für Quader ...



Bsp.: Schwerpunkt eines Halbkreises $A \subseteq \mathbb{R}^2$

„Gesamtmasse" $M := \int_A dx = \frac{\pi}{2} R^2$

x_2-Koordinate des Schwerpunkts:

$$\frac{1}{M}\int_A x_2 \, dx \underset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{M}\int_{-R}^{R}\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x_1^2}} x_2 \, dx_2\right) dx_1 = \frac{1}{M}\int_{-R}^{R} \frac{R^2-x_1^2}{2} \, dx_1$$

$$= \frac{1}{2M}\left(2R^3 - \frac{2}{3}R^3\right) = \frac{4}{6}\frac{2R^3}{\pi R^2} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}}}$$

x_1-Koordinate ist 0

... nun zu „uneigentlichen" Riemann-Integralen:

Def.: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine bel. Teilmenge. $\{A_k \subseteq \mathbb{R}^n\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq A$ heißt „<u>ausschöpfende Folge</u>" <u>für A</u> wenn gilt

(0) $\forall k \in \mathbb{N}$: A_k beschränkt $\wedge$ ∂A_k vom Lebesgue-Maß Null,

(i) $\forall R \in (0,\infty)$ $\forall k \in \mathbb{N}$: existiert $\int_{(A\setminus A_k)\cap B_R(0)} dx =: \mathrm{vol}\left((A\setminus A_k)\cap B_R(0)\right)$,

(ii) $\forall R \in (0,\infty)$: $\lim_{k\to\infty} \mathrm{vol}\left((A\setminus A_k)\cap B_R(0)\right) = 0$.

Bsp.:
- $A = \mathbb{R}^n$ wird sowohl durch Kugeln $(A_k = B_k(0))$ als auch durch Würfel $(A_k = [-k,k]^n)$ ausgeschöpft.
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \in (0,1]\}$ wird durch $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \in [\frac{1}{k}, 1]\}$ ausgeschöpft.

Def.: Sei $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

- wenn $f \geq 0$ ist, und eine ausschöpfende Folge A_k für A existiert, so dass $\forall k$ $f|_{A_k}$ beschränkt und R.-integrierbar ist, dann heißt
$$\lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f(x)\,dx =: \int_A f(x)\,dx \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \qquad (*)$$
das „uneigentliche R.-Integral" von f auf A.

- wenn $f = f_+ - f_-$ mit $f_+, f_- \geq 0$, dann ist das uneig. R.-I. definiert als
$$\int_A f(x)\,dx = \int_A f_+(x)\,dx - \int_A f_-(x)\,dx \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$
sofern beide Integrale existieren und nicht beide ∞ sind.

- ist $\int_A f(x)\,dx$ endlich, sagt man das uneig. R.-I. „konvergiert".

Bemerkung: man kann zeigen, dass $(*)$ unabh. von der ausschöpfenden Folge ist.

Satz: Sei $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann konvergiert $\int_A f(x)\,dx$, wenn es eine ausschöpfende Folge A_k für A gibt, so dass
$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{A_k} |f(x)|\,dx < \infty.$$

Bsp.:

- $A = [0,\infty)^2$, $f(x) = e^{-x_1-x_2}$, $A_k = [0,k]^2$
$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,k]^2} e^{-x_1-x_2}\,dx \overset{\text{Fubini}}{=} \lim_{k\to\infty} \left[-e^{-x_1}\right]_0^k \left[-e^{-x_2}\right]_0^k = \lim_{k\to\infty} (1-e^{-k})^2 = \underline{\underline{1}}$$

- $A = (0,1)^2$, $f(x) = \frac{x_1}{x_2}$, $A_k = (0,1) \times (\frac{1}{k}, 1)$

$$\int_{(0,1)^2} \frac{x_1}{x_2}\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{(0,1)\times(\frac{1}{k},1)} \frac{x_1}{x_2}\,dx \overset{\text{Fubini}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{(0,1)} \left(\int_{(\frac{1}{k},1)} \frac{1}{x_2}\,dx_2 \right) x_1\,dx_1$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{(0,1)} (\log k)\, x_1\,dx_1 = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \log k = \underline{\underline{\infty}}$$