FUNKTIONENTHEORIE

Def.: Sei $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- f heißt bei $z_0 \in U^\circ$ „komplex differenzierbar", wenn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) \quad \text{existiert.}$$

- f heißt „holomorph" in U, wenn es eine offene Umgebung $V \supseteq U$ gibt, so dass $f'(z)$ für alle $z \in V$ existiert. ($V = U$, wenn U offen)

- f heißt „ganze Fkt." wenn f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist.

Satz: $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ ist genau dann bei $z = x+iy$ komplex differenzierbar, wenn $\tilde{f} : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ bei (x,y) reell differenzierbar ist und die Cauchy-Riemannschen Gleichungen erfüllt sind. D.h., wenn

$$\tilde{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}(x,y) \quad \text{von der Form} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{und damit}$$

eine „Drehstreckung" ist.

Beweis: ◦ Existiert $f'(z)$, dann gilt für $h \in \mathbb{R}$:

$$(i) \quad f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i \frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \right)$$

$$= (\partial_x u + i \partial_x v)(x,y)$$

$$(ii) \quad f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{ih} + i \frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{ih} \right)$$

$$= (-i \partial_y u + \partial_y v)(x,y)$$

also $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_x v = -\partial_y u$ bei (x,y).

Umgekehrt, ist $\tilde{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, dann gilt für $h = h_x + i h_y$:

$$0 = \lim_{(h_x,h_y)\to 0} \frac{\left\| \tilde{f}(x+h_x, y+h_y) - \tilde{f}(x,y) - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \right\|}{\|(h_x,h_y)\|}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|f(z+h) - f(z) - ch|}{|h|} \quad \text{wobei } c = a + ib. \qquad \square$$

Beispiele:

- Eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ mit Konvergenzradius ϱ ist holomorph auf $U = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < \varrho \}$ mit

  $$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$ (werden wir mittels Weierstraß beweisen; f' besitzt denselben Konvergenzradius)

  D.h. $\exp(z)$, $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\cosh(z) = \cos(iz)$, $\sinh(z) = \frac{1}{i}\sin(iz)$ sind ganze Funktionen.

- $f(z) = z^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $f'(z) = -n z^{-n-1}$.

- $z \mapsto \bar{z}$ ist nirgends holomorph, da $\partial_x u = 1 \neq \partial_y v = -1$

Bemerkungen:

- Für komplexe Differentiation gelten die üblichen Rechenregeln:
  $(f+g)' = f' + g'$, $(f\cdot g)' = f'g + fg'$, $(f\circ g)'(z) = f'(g(z))\, g'(z)$

- Ist $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph, dann sind u & v harmonisch, d.h.

  $\Delta u = \Delta v = 0$ auf U da z.B. $\partial_x \partial_x u = \partial_x \partial_y v = \partial_y \partial_x v = -\partial_y \partial_y u$

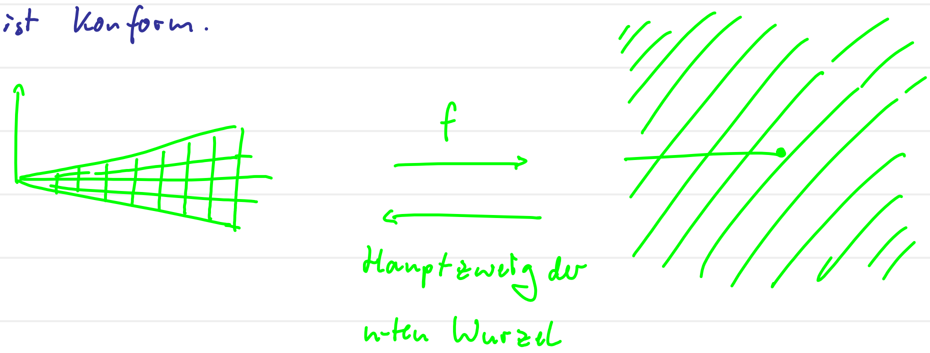
  (wir zeigen später, dass f holomorph $\Rightarrow f \in C^\infty$)

- Die Abbildung $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist winkeltreu genau dann wenn sie von Null verschieden ist. $f: U \subseteq \mathbb{C} \to V \subseteq \mathbb{C}$ heißt „lokal konform", wenn sie holomorph und $\forall z \in U: f'(z) \neq 0$ gilt. f heißt „konform" wenn f zusätzlich bijektiv ist.

Beispiele: ∘ $f : \{ re^{i\varphi} \mid r>0,\ \varphi \in (-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}) \} \to \underbrace{\mathbb{C} \setminus \{ z \mid \operatorname{Im}(z)=0,\ \operatorname{Re}(z) \leq 0 \}}_{\text{negativ geschlitzte Ebene } =: \mathbb{C}^-}$

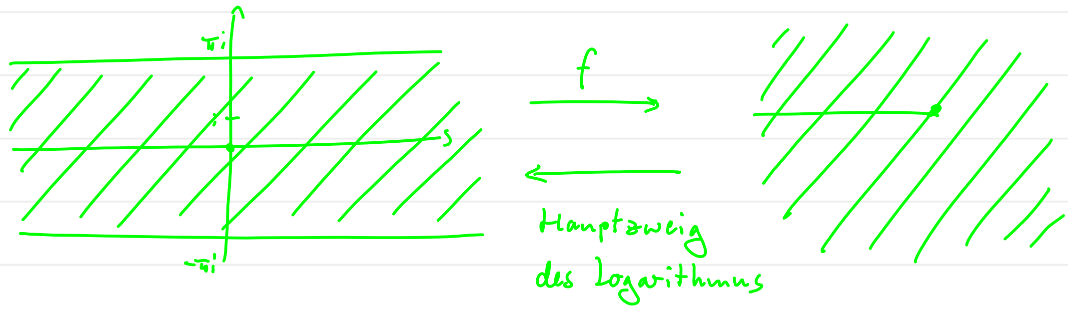
$z \mapsto z^n,\ n \in \mathbb{N}$

ist konform.



∘ $f : \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \in (-\pi, \pi) \} \to \mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{ z \mid \operatorname{Im}(z)=0,\ \operatorname{Re}(z) \leq 0 \}$

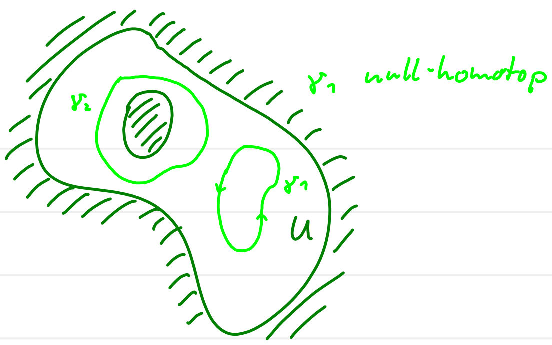
$z \mapsto e^z$ ist konform

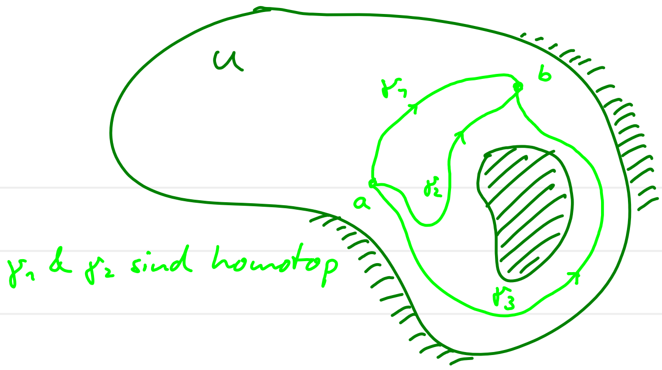


Im Folgenden sind „Kurven" $\gamma \in C([a,b], \mathbb{C})$ stets stückweise stetig differenzierbar gemeint.

Def.: ∘ Eine geschlossene Kurve γ heißt „null-homotop" in $U \subseteq \mathbb{C}$ falls sich γ stetig in U auf einen Punkt zusammen ziehen läßt, d.h. es gibt $F \in C([0,1] \times [0,1], U)$ mit $F(0,t) = \gamma(t)$ und $F(1,t) = z_0 \ \forall\, t \in [0,1]$.

∘ Zwei Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to U \subseteq \mathbb{C}$ mit identischen Randpunkten heißen „homotop" in U, wenn ihre Verknüpfung $\gamma : [0,2] \to U$, $\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & t \leq 1 \\ \gamma_2(2-t) \end{cases}$ null-homotop ist.





- Eine zusammenhängende Menge U heißt „<u>einfach zusammenhängend</u>", wenn jede geschlossene Kurve in U null-homotop ist.
- Ist γ eine aus $\gamma_i \in C^1([0,1], U \subseteq \mathbb{C})$ zusammengesetzte Kurve, dann definieren wir $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz := \sum_i \int_0^1 f(\gamma_i(t))\,\dot\gamma_i(t) =: \int_{\sum_i \gamma_i} f(z)\,dz$.

<u>Lemma:</u> (Standardabschätzung) Es gilt $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot \text{Länge von } \gamma$

<u>Beweis:</u> $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \int_0^1 |f(\gamma(t))| \cdot |\dot\gamma(t)|\,dt \leq \max_{t\in[0,1]} |f(\gamma(t))| \cdot \int_0^1 |\dot\gamma(t)|\,dt$ □

<u>Satz von Cauchy-Goursat:</u> Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph.

(i) Sind γ_1, γ_2 homotope Kurven in U, dann ist

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

(ii) Ist γ eine null-homotope geschlossene Kurve in U, dann gilt:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

(iii) Ist U einfach zusammenhängend, dann ist für bel. $z_0 \in U$

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi \quad \text{eine holomorphe Stammfunktion,}$$

d.h. $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in U$.

Bemerkung: • Der wesentliche Unterschied zum Korollar aus dem Satz von Stokes ist, dass hier nur Differenzierbarkeit und nicht C^1 gefordert wird.

(Satz für C^1 ist von Cauchy, ohne Stetigkeit von f' von Goursat.
Beweis von letzterem → z.B. Königsberger)

• $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz := \int_\gamma f(z)\,dz$ entlang einer bel. Kurve $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z$. Wegen (i) ist dies wohldefiniert.

Beweis von (iii): $\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right|$ ist wegen $F(z+h) = F(z) + \int_z^{z+h} f(\xi)\,d\xi$ gleich

$$= \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\xi)\,d\xi - f(z) \frac{1}{h} \int_z^{z+h} d\xi \right|$$

da $\int_z^{z+h} d\xi = \int_0^1 \dot\gamma(t)\,dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[(1-t)z + t(z+h)\right] dt = \int_0^1 h\,dt = h$

$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_0^1 \big(f(\gamma(t)) - f(z)\big)\,\dot\gamma(t)\,dt \right|$$

Δ-Ungl.

$$\leq \frac{1}{|h|} \sup_{w \in B_{|h|}(z)} |f(w) - f(z)| \cdot \underbrace{\int_0^1 |\dot\gamma(t)|\,dt}_{\text{Länge der Kurve } = |h| \text{ für gerade Verbindung}}$$

$$= \sup_{w \in B_{|h|}(z)} |f(w) - f(z)| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

$\square$

Bsp.: Hauptzweig des Logarithmus: $\ln : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$

$\ln(z) := \int_1^z \frac{1}{\xi}\,d\xi$ ist holomorph auf $\mathbb{C}^-$ mit $\ln'(z) = \frac{1}{z}$

wegen $\left(z e^{-\ln z}\right)'(z) = e^{-\ln(z)} - e^{-\ln z} = 0$

ist $z e^{-\ln z} = \text{const} = 1$ und daher $e^{\ln(z)} = z$.

Es gilt $\ln(re^{i\varphi}) = i\varphi + \ln r$ ($+ 2\pi k i$ für den k'ten Nebenzweig)