A12.3 Bestimme $G_t(x)$, s.d. $g(x,t) = \underline{\underline{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}}\, G_t * g_0(x)$ 24.1.2013

Wdh.: $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ heißt

$F: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ ist stetige lineare Abbildung

Bsp: • $\delta[\varphi] = \int \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$ Delta-Distribution

• $f \in L^1(\mathbb{R})$: $f[\varphi] := \int f(x)\varphi(x)\,dx$ ist Distribution

$(\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$

Ableitung: $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$F'[\varphi] = -F[\varphi']$$

Bsp: Heaviside-Funktion $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$$\Theta'(x) = \frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x) \quad \left(\text{bedeutet } \Theta'[\varphi] = \delta[\varphi] = \varphi(0)\right)$$

Beweis: Üb

Definition: Eine Folge von Distributionen $F_h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ konvergiert gegen $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $F_h \xrightarrow{D} F$, wenn für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\lim_{h\to\infty} F_h[\varphi] = F[\varphi].$$

Man schreibt auch $\displaystyle D\text{-}\lim_{h\to\infty} F_h = F$

Satz Sind $F_h, F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, mit $F_h \xrightarrow{D} F$, so gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$\partial^\alpha F_h \xrightarrow{D} \partial^\alpha F$$

Beweis: Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Es gilt $F_k[\partial_j\varphi] \to F[\partial_j\varphi]$, da $\partial_j\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $j=1,\dots,n$. Somit ist

$$\lim_{k\to\infty} \partial_j F_k[\varphi] = -\lim_{k\to\infty} F_k[\partial_j\varphi] = -F[\partial_j\varphi] = \partial_j F[\varphi] \quad \blacksquare$$

Bsp: Für $f_k(x) = \sin kx$, $k\in\mathbb{N}$, gilt $f_k \xrightarrow{D} 0$ Beweis: Üb

Anwendung: • Fundamentallösung der Laplace-Gleichung im $\mathbb{R}^3$

Newtonpotential $\quad G_a(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-a\|} & x\neq a, \\ 0 & x=a, \quad a\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$

- Es gilt $\Delta G_a(x) = 0$ für $x\neq a$
- G_a ist keine L^1-Funktion, aber lokal integrierbar,

$$\int_{\|x-a\|\leq r} |G_a(x)|dx = \frac{1}{4\pi}\int_{\|x-a\|\leq r} \frac{1}{\|x-a\|}dx = \frac{4\pi}{4\pi}\int_0^r \frac{\rho^2}{\rho}\,d\rho = \frac{1}{2}r^2 < \infty$$

f.a. $r>0$

- G_a ist Distribution, $G_a[\varphi] = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi(x)}{\|x-a\|}dx$ ist wohldefiniert für $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ (und stetig)
- Aus dem ersten Greenschen Integralsatz (Vorl) folgt leicht der zweite:

$$\int_A f\Delta g\,dx - \int g\Delta f\,dx = \int_{\partial A} f\langle\nabla g,\nu\rangle dS - \int_{\partial A} g\langle\nabla f,\nu\rangle dS$$

für $f,g\in C^2(U)$, $U\supseteq A$ offen, A kompakt mit glattem Rand und ν äußeres Normalenfeld (normiert)

<u>Satz</u>: $\quad \Delta G_a = \delta_a \quad$ als Distributionen

Beweis: Sei $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$

$$\Delta G_a[\varphi] = G_a[\Delta\varphi] = \int \underbrace{G_a(x)\,\Delta\varphi(x)}_{\text{integierbar}}\,dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon \leq \|x-a\| \leq \frac{1}{\epsilon}} G_a(x)\,\Delta\varphi(x)\,dx \overset{\text{Green}}{=} \lim_{\epsilon\to 0}\Bigg[\int_{\epsilon\leq\|x-a\|\leq\frac{1}{\epsilon}} \overbrace{\Delta G_a(x)}^{=0}\,\varphi(x)\,dx$$

$$\left(n(x) = \frac{x}{\|x\|}\right)$$

$$+ \underbrace{\int_{\|x-a\|=\frac{1}{\epsilon}} G_a\langle\nabla\varphi,n\rangle dS}_{\to 0 \text{ da } \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)} - \int_{\|x-a\|=\epsilon} G_a\langle\nabla\varphi,n\rangle dS - \underbrace{\int_{\|x-a\|=\frac{1}{\epsilon}} \varphi\langle\nabla G_a,n\rangle dS}_{\to 0,\ \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)} + \int_{\|x-a\|=\epsilon} \varphi\langle\nabla G_a,n\rangle dS\Bigg]$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon}\underbrace{\int_{\|x-a\|=\epsilon}\langle\nabla\varphi,n\rangle dS}_{\substack{\text{beschränkt durch}\\ 4\pi\epsilon^2\cdot\text{const}}} + \frac{1}{4\pi\epsilon^2}\underbrace{\int_{\|x-a\|=\epsilon}\varphi(x)\,dS(x)}_{\text{in }[\min_{\|x-a\|\leq\epsilon}\varphi(x),\ \max_{\|x-a\|\leq\epsilon}\varphi(x)]\cdot 4\pi\epsilon^2}\right]$$

$$= 0 + \varphi(a) = \delta_a[\varphi] \qquad \square$$

Fouriertransformation von Distributionen

Für Testfunktionen $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{f}, \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k)\varphi(k)\,dk = \langle \overline{\overline{\hat{f}}}, \varphi\rangle \overset{\text{Plancherel}}{=} \langle \hat{\overline{\overline{\hat{f}}}}, \hat{\varphi}\rangle \overset{(*)}{=} \langle \bar{f}, \hat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)\,dx.$$

$(*)$ denn $\overline{\hat{f}} = \check{\bar{f}}$: $\overline{\int e^{-ik\cdot x} f(x)\,dx} = \int e^{ik\cdot x}\bar{f}(x)\,dx$,

Also gilt $\hat{f}[\varphi] = f[\hat{\varphi}]$. Dies motiviert die

Definition: Für jede Distribution T definiert man die **Fouriertransformierte** $\hat{T}$ durch

$$\hat{T}[\varphi] := T[\hat{\varphi}] \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Bem: (ohne Bew.) $\hat{F} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Bsp: 1. Fouriertransformation der Delta-Distribution im $\mathbb{R}^n$: $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{\delta}[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\delta}(k)\varphi(k)\,dk = \delta[\hat{\varphi}] = \int \delta(x)\hat{\varphi}(x)\,dx = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int \varphi(x)\,dx$$

D.h. $\boxed{\hat{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}}$ als Distributionen.

Bem. Das ist konsistent mit "$\hat{\delta}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int e^{-ik\cdot x}\delta(x)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$"

2. Fouriertransformation von δ' auf $\mathbb{R}$: $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\hat{\delta'}[\varphi] = \delta'[\hat{\varphi}] = -\delta\left[\frac{d}{dk}\hat{\varphi}\right] = -\hat{\varphi}'(0)$$

$$= -(-i)\widehat{x\varphi}(0) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int x\varphi(x)\,dx = \frac{ix}{\sqrt{2\pi}}[\varphi]$$

Fazit: "$\hat{\delta'}(k) = \frac{ik}{\sqrt{2\pi}}$" als Distributionen

Definition: $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann ist $x^\alpha F$ die durch $(x^\alpha F)[\varphi] := F[x^\alpha \varphi]$ definierte Distribution, wobei $(x^\alpha\varphi)(y) = y^\alpha \varphi(y)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Satz Sei $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann gilt

(i) $\widehat{\partial^\alpha F} = (ik)^\alpha \hat{F}$

(ii) $\widehat{x^\alpha F} = i^{|\alpha|}\partial^\alpha \hat{F}$

Beweis Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ beliebig

(i) $$\widehat{\partial^\alpha F}[\varphi] = \partial^\alpha F[\hat{\varphi}] = (-1)^{|\alpha|}F[\partial^\alpha\hat{\varphi}] = (-1)^{|\alpha|}(-i)^{|\alpha|}F[\widehat{x^\alpha\varphi}]$$

$$= i^{|\alpha|}\hat{F}[x^\alpha\varphi] = (i^{|\alpha|}k^\alpha\hat{F})[\varphi]$$

(ii) analog

Definition Für $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist die Fourierrücktransformierte $\check{F}$ definiert durch $\check{F}[\varphi] = F[\check{\varphi}]$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Bemerkung:

- $\check{F} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$
- $\check{\hat{F}} = F$ für alle $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, denn

$$\check{\hat{F}}[\varphi] = \hat{F}[\check{\varphi}] = F[\hat{\check{\varphi}}] = F[\varphi]$$

Ausblick:

Sei M ein kp UMfk des $\mathbb{R}^n$, $f: M \to \mathbb{R}$ stetig

Dann definiert

$$(f\delta_M)[\varphi] := \int_M \varphi(x) f(x)\, dS(x)$$

eine Distribution $f\delta_M \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Literatur: Forster Analysis 3 (Distributionen auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ statt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)

weiterführend

Constantinescu: Distributionen und ihre Anw. in der Physik, Teubner '74

Strichartz: A guide to distribution theory and Fourier analysis, World Scientific '03