Dirac-Folgen

22.1.2013

Def Eine Folge $\delta_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\delta_k \geq 0, \|\delta_k\|_1 = 1$

und $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{\|x\|\leq r} \delta_k(x)\,dx = 1$ f.a. $r > 0$

heißt Dirac-Folge

Bsp. • $\delta_k(x) = \frac{1}{(2\pi\epsilon_k^2)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\epsilon_k^2}}$, $\epsilon_k \geq 0$ Nullfolge $(x \in \mathbb{R}^n)$

• $\delta_k(x) = \frac{k}{2} \chi_{[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Für beide gilt $\delta_k(x) \to 0$ f.ü.

Satz: Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und δ_k Dirac-Folge, so gilt

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} \|\delta_k * f - f\| = 0$ $(*)$

(ii) Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta_k(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$ $(**)$

(iii) Ist $\delta_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ so gilt $\delta_k * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\partial^\alpha(\delta_k * f) = f * \partial^\alpha \delta_k, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n \quad (***)$$

Beweisskizze: (i), (ii) siehe ZÜ. (iii) Vertauschen von Differentiation und Integration mit majorisierter Konvergenz und den Schranken $\|\partial^\alpha \delta_k\|_\infty = M_\alpha < \infty$.

$$\partial^\alpha(\delta_h * f)(x) = \partial^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \delta_h(x-y)\, f(y)\, dy$$

$$\overset{!}{=} \int (\partial^\alpha \delta_h)(x-y)\, f(y)\, dy = (\partial^\alpha \delta_h) * f$$

(Temperierte) Distributionen

Verallgemeinerung des Funktionenbegriffs

$\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$. $\tilde{f}(x) = c \in \mathbb{R}$ macht i.A. keinen Sinn.

Bsp $f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha \in \mathbb{C} & \text{für } x=0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. $f_\alpha \in \tilde{O}$ aber $f_\alpha(0) = \alpha$

Aber $\int_a^b \tilde{f}(x)\, dx$ ist wohldefiniert und

insbesondere für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)\varphi(x)\, dx \in \mathbb{R}$

"Eine Distribution ist ein Objekt, das jeder Testfunktion einen Wert zuordnet"

Wir wählen den Schwartz-Raum als Raum der Testfunktionen.

Def: Eine (temperierte) Distribution F ist eine stetige, lineare Abbildung

$$F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto F[\varphi] \in \mathbb{C}.$$

Bemerkungen 1. Schreibweisen:

$$F[\varphi] = (F, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\varphi(x)\, dx \quad (\text{symbolisch, } F(x) \text{ i.A. nicht def})$$

2. F linear bedeutet, $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, dann ist

$$F[\varphi + \lambda\psi] = F[\varphi] + \lambda F[\psi]$$

Die Stetigkeit bedeutet, dass für jede Folge $\varphi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ die konvergent ist gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ im Sinne

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \quad \left\| x^\alpha \partial^\beta \left(\varphi_k(x) - \varphi(x)\right)\right\|_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

folgt, dass

$$\lim_{k\to\infty} \left| F[\varphi_k] - F[\varphi] \right| = 0$$

Dies Bedingung wird im weiteren nicht näher untersucht.

3. Der Raum der Distributionen, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ist selbst ein Vektorraum. Sind F, G Distributionen, $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist auch $F + \lambda G$ eine Distribution

4. Jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert mittels

$$F_f[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx \in \mathbb{C}$$

eine Distribution. Dies motiviert die symbolische Schreibweise $\quad F_f[\varphi] = \int F_f(x)\,\varphi(x)\,dx$

5. Es kann gezeigt werden, dass sich jede Distribution F durch eine Folge von ~~Test~~ Schwartz funktionen $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ approximieren lässt, d.h. es gilt für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$F_{f_k}[\varphi] \xrightarrow{k\to\infty} F[\varphi]$$

$$\left(\quad \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,\varphi(x)\,dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \right)$$

Eine solche Folge (f_k) heißt konvergent gegen F (im Distributionensinn)

Def Die (n-dimensionale) Delta-Distribution $\delta : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$\delta[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\varphi(x)\,dx := \varphi(0)$$

Bemerkung: Jede Dirac-Folge δ_k, z.B. $\delta_k(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{k\|x\|^2}{2}}$, konvergiert im Distributionensinn gegen δ, denn für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int \delta_k(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) = \delta[\varphi] \quad \text{(s.o.)}$$

Folgender Kalkül motiviert zusätzlich die symbolische Integralschreibweise:

1. Ist F eine Distribution und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$F_a[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\varphi(x+a)\,dx$$

die um a geshiftete Distribution.

Symbolisch:

$$F_a[\varphi] =: \int_{\mathbb{R}^n} F(x-a)\varphi(x)\,dx$$

In der symbolischen Schreibweise ist also die Transformationsformel für $x \mapsto x-a$ gültig

Bsp.: $\delta_a[\varphi] = \int \delta(x-a)\varphi(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \int \delta(x)\varphi(x+a)\,dx = \varphi(0+a) = \varphi(a)$

2. Für $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ wird durch

$$F_\lambda[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\frac{1}{|\lambda|^n}\,dx,$$

die mit λ gestauchte Distribution definiert.

Die symbolische Schreibweise

$$F_\lambda[\varphi] =: \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda x)\,\varphi(x)\,dx$$

ermöglicht die Anwendung der Transformationsformel für $x \mapsto \lambda x$

<u>Bsp:</u> $\delta_\lambda[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\lambda x)\,\varphi(x)\,dx \underset{y=\lambda x}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(y)\,\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\frac{1}{|\lambda|^n}dy = \frac{\varphi(0)}{|\lambda|^n}$

d.h. $\delta_\lambda = \frac{1}{|\lambda|^n}\delta$, bzw. "$\delta(\lambda x) = \frac{\delta(x)}{|\lambda|^n}$"

Insbesondere ist für $\lambda = -1$: "$\delta(-x) = \delta(x)$", d.h. δ ist eine gerade Distribution.

3. Allgemeine Transformationsformel für δ:

Sei $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit endlich vielen Nullstellen $x_j, j = 1, \dots, N$ und $\det(Dh(x_j)) \neq 0$

Dann setzt man

$$\text{"}\,\delta(h(x)) := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{|\det Dh(x_j)|}\,\delta(x - x_j)\,\text{"}.$$ siehe ZÜ

<u>Ableitung von Distribution</u>

<u>Definition</u> Für jede Distribution F und Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ definiert man die <u>partielle Ableitung</u> $\partial^\alpha F$ durch

$$\partial^\alpha F[\varphi] := (-1)^{|\alpha|} F[\partial^\alpha \varphi] \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Speziell für $n = 1, k \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{d^k}{dx^k}F\right)[\varphi] = \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{d^k}{dx^k}F\right)(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} F(x)\,\varphi^{(k)}(x)\,dx = (-1)^k F[\varphi^{(k)}]$$

Definition ist konsistent mit partieller Integration. Insbes. ist für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\frac{d}{dx}F_f = F_{f'}$.