Anwendung: Zentraler Grenzwertsatz

Wie kommt es, dass die Gaußverteilung (= Normalverteilung) allgegenwärtig ist?

Def.:

- $\varrho \in L^1(\mathbb{R})$ heißt „Wahrscheinlichkeitsdichte" auf $\mathbb{R}$, wenn $\varrho \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \varrho(x)\,dx = 1$.

- $m := \int_{\mathbb{R}} x\,\varrho(x)\,dx$ heißt „Mittelwert"

- $\sigma^2 := \int_{\mathbb{R}} x^2 \varrho(x)\,dx - m^2$ heißt „Varianz"

  Es gilt $\sigma^2 \geq 0$, da $\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 \varrho(x)\,dx$

- Ist $\varrho \in L^1(\mathbb{R})$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte, dann heißt $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

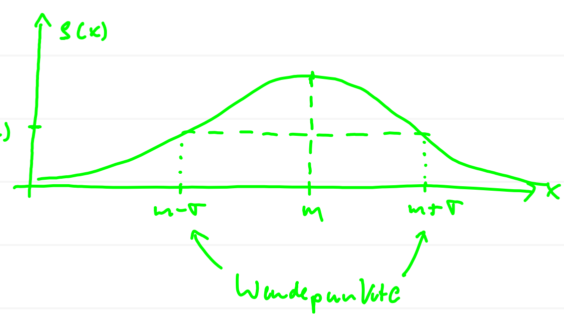
  $$\boxed{\chi(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \varrho(x)\,dx}$$

  die zugehörige „charakteristische Funktion".

  Es gilt also stets $\chi(0) = 1$.

Bsp.: Normalverteilung mit Mittelwert m & Varianz σ^2:

$$\varrho(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



$$\chi(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} e^{-imt}$$

Satz: Sei $\chi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ charakteristische Funktion einer Wahrscheinlichkeitsdichte mit Mittelwert $m=0$ und Varianz σ^2. Dann gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \chi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}}$$

Beweis: Taylorentwicklung:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\theta(x), \quad \text{wobei} \quad x \mapsto \theta(x) \text{ stetig}, \quad \theta(0)=0$$

und $\theta(x) = 1 + 2(e^{ix} - 1 - ix)/x^2$ beschränkt.

$$\Rightarrow \chi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}\xi} \, g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left[1 + i\frac{t\xi}{\sqrt{n}} - \frac{t^2\xi^2}{2n}\left(1 + \theta\left(\frac{t\xi}{\sqrt{n}}\right)\right)\right] g(\xi)\, d\xi$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2n}\left(\sigma^2 + \vartheta_n(t)\right) \quad \text{wobei} \quad \vartheta_n(t) := \int_{\mathbb{R}} \xi^2\, \theta\left(\frac{t\xi}{\sqrt{n}}\right) g(\xi)\, d\xi$$

aus $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \vartheta_n(t) \underset{\text{maj. Konvergenz}}{=} \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \xi^2\, \theta\left(\frac{t\xi}{\sqrt{n}}\right) g(\xi)\, d\xi = 0$ folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} \chi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{t^2\sigma^2}{2n}\left(1 + \frac{\vartheta_n(t)}{\sigma^2}\right)\right]^n$$

$$= e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \qquad \square$$

Charakteristische Funktion einer Gaußverteilung mit $m=0$ & Varianz σ^2.

Interpretation: Ist $(X_i)_{i=1}^n$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Mittelwert m, dann konvergiert die Verteilung von

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - m)$$

gegen eine zentrierte Gaußverteilung mit derselben Varianz. Die Konvergenz ist punktweise für die charakteristischen Funktionen.

Anwendung: inhomogene lineare Differentialgleichungen (analog zu Analysis I)

$$\boxed{\ddot{x} - x = f} \quad \text{wobei: } f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$$

Allgemeine Lösung: $$x(t) = \underbrace{c_+ e^{t} + c_- e^{-t}}_{\text{allg. Lsg. von } \ddot{x} - x = 0} + \underbrace{x_s(t)}_{\text{spezielle Lsg.}}$$

Ansatz für spezielle Lsg.: $$x_s(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikt} \, \hat{x}_s(k) \, dk$$

nach Fouriertrafo wird $\ddot{x} - x = f$ zu $-(k^2+1)\,\hat{x}_s = \hat{f}$

mit $\hat{g}(k) := \frac{1}{1+k^2}$ ist dann $\hat{x}_s = -\hat{g}\hat{f}$, also

$$\boxed{x_s(t) = -(2\pi)^{-1/2} (f * g)(t)}$$

$\rightarrow$ Übung

Anwendung: Lösung der Wärmeleitungsgleichung (Diffusionsgleichung)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} S(x,t) = D \Delta S(x,t)} \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

Anfangsbedingung: $S(x,0) = S_0(x)$, $\quad S_0, \hat{S}_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$

„Diffusionskoeffizient" $D > 0$ ($D = i$ wäre Schrödingergleichung)

Ansatz: $$S(x,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x} \, \hat{S}(k,t) \, dk$$

FT bzgl. $x \leftrightarrow k$

$\rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t} \hat{S}(k,t) = -D \|k\|^2 \hat{S}(k,t)$ mit $\hat{S}(k,0) = \hat{S}_0(k)$ nur noch gewöhnliche anstatt partieller DGL.!

$\rightarrow$ $\hat{S}(k,t) = e^{-tD\|k\|^2} \hat{S}_0(k) =: \hat{G}_t(k)\, \hat{S}_0(k)$

$\rightarrow$ $$\boxed{S(x,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y)\, S_0(y)\, dy} \text{ mit } G_t(x) = (2tD)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4tD}}$$

Fouriertransformation im Schwartz-Raum

Def.: Der „Schwartz-Raum" $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (= Raum schnell abfallender Fkt.en) ist definiert als

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \;\middle|\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : \; t \mapsto t^\alpha \partial^\beta f(t) \text{ ist beschränkt} \right\}$$

Bsp.:
- $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger $\Rightarrow f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
- $f(x) = e^{-t \cdot At}$, $A > 0 \Rightarrow f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Korollar: Mit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $c \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sind folgende Fkt.en ebenfalls in $\mathcal{S}$:

(i) $t \mapsto g(t) f(t)$ & $t \mapsto \overline{g(t)} f(t)$

(ii) $t \mapsto c g(t) + f(t)$ insbesondere $t \mapsto e^{i x \cdot t} f(t)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

(iii) $t \mapsto t^\alpha f(t)$

(iv) $t \mapsto \partial^\alpha f(t)$

Bemerkungen:
- Es gilt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{S}$ liegt „dicht" in L^2, d.h.

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n) \; \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \lim_{n \to \infty} \| f - f_n \|_2 = 0$$

- Wegen (ii) ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ein Vektorraum, (i) ermöglicht ein Skalarprodukt:

$$\boxed{\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} \, g(x)}$$

mit zugehöriger Norm $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.