Zentralübung

Z11.1. Iterative Lösungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen

Man illustriere an Hand des Anfangswertproblems $\dot{x} = -x$, $x(0) = 1$ die iterativen Lösungsverfahren

(a) Picard–Iteration, (b) Euler–Verfahren, (c) implizites Euler–Verfahren.

Z11.2. Implizite Funktionen mittels Differentialgleichungen

Seien $f \in C^2(U \times V)$ mit $U, V \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $\partial_2 f(x, y) \neq 0$ für alle $x \in U$, $y \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass die durch $f(x, g(x)) = 0$ implizit definierte Funktion $g : U \to V$ der Differentialgleichung
$$g'(x) = -\frac{\partial_1 f(x, g(x))}{\partial_2 f(x, g(x))}$$
genügt.

(b) Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass diese Differentialgleichung eine eindeutige Lösung $g : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit Anfangswert $g(x_0) = y_0$ besitzt.

(c) Wie lautet die Differentialgleichung im Spezialfall $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Lösen Sie das Anfangswertproblem zu $g(0) = 1$.

Z11.3. Konstanten der Bewegung

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: $E \in C^1(U, \mathbb{R})$ ist genau dann entlang jeder Integralkurve von $F \in \mathbb{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ konstant, wenn für alle $x \in U$ gilt: $\nabla E(x) \perp F(x)$.

Präsenzaufgaben

P11.1. Picard-Iteration

Berechnen Sie für das Anfangswertproblem $\dot{x} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) x$, $x(0) = x_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ die Picard-Iterierten $\phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und bestätigen Sie, dass $t \mapsto \lim\limits_{k \to \infty} \phi_k(t)$ das AWP löst.

P11.2. Separierbare Differentialgleichungen

Bestimmen Sie Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{2tx^2}{t^2+1}$, Skizzieren Sie die Lösungskurven.

P11.3. Lösungsraum einer inhomogenen Differentialgleichung

Die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gegeben durch $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = 2t$, $\varphi_3(t) = t^2$. Über eine lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung (mit zeitabhängigen Koeffizienten) ist bekannt, dass φ_1, φ_2 und φ_3 Lösungen sind. Geben Sie die Menge aller Lösungen dieser Differentialgleichung an.

Hausaufgaben

H11.1. Eindeutigkeit von Lösungen

Geben Sie, mit Skizze, alle Lösungen des AWPs $\dot{x} = -|x|^\alpha$, $x(0) = 1$, an, für

(a) $\alpha = 2$, (b) $\alpha = 1$, (c) $\alpha = \frac{1}{2}$.

H11.2. Separierbare Differentialgleichungen

Geben Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an:

(a) $y'x = 2y$, (b) $y' = \frac{2x}{x^2+1}y$, (c) $y'(y+1)^2 + x^3 = 0$.

H11.3. Inhomogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{x} - x = g(t)$ mit
(a) $g(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ und (b) $g(t) = \mathrm{e}^t$.
HINWEIS: Wählen Sie als Ansatz für eine Lösung ein Vielfaches von $g(t)$ bzw. $tg(t)$.

Hausaufgabenabgabe: bis Dienstag, 21.07.2020, 10:15, als PDF in Moodle