II. Normierte Vektorräume und lineare Abbildungen

Def.: Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume $(\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$

- $\mathcal{B}(X,Y) := \{ A: X \to Y \text{ linear} \mid \exists c \in \mathbb{R}: \forall x \in X: \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X \}$ definiert die Menge der beschränkten linearen Abbildungen („Operatoren").

- Für eine lineare Abbildung $A: X \to Y$ definieren wir die Operatornorm $\|A\| := \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \in [0, \infty]$

Bem.:
- $\mathcal{B}(X,Y)$ ist selbst ein $\mathbb{K}$-Vektorraum auf dem die Operatornorm, wie der Name suggeriert, eine Norm ist.
- Per Definition ist $\|A\|$ die kleinste Konstante $c \in \mathbb{R}$ für die $\|Ax\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in X$ gilt.
- Man zeigt leicht $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

Satz: Sei $A: X \to Y$ eine lineare Abbildung zw. normierten Vektorräumen und $x \in X$. Dann sind äquivalent:

(i) A ist Lipschitz-stetig.

(ii) A ist stetig bei x.

(iii) A ist beschränkt.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) ✓

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Stetigkeit bei x impliziert $\forall y \in X$:

$$\exists \delta > 0: \|y - x\| \leq \delta \Rightarrow \|Ax - Ay\| \leq 1$$

Dies trifft insbesondere für $y := (\delta \frac{z}{\|z\|} + x)$ zu, wobei $z \in X\setminus\{0\}$ bel., da $\|y - x\| = \|\delta \frac{z}{\|z\|}\| = \delta$.

D.h. $1 \geq \|Ax - Ay\| = \delta\|Az\|/\|z\|$, so dass $\|Az\| \leq \frac{1}{\delta}\|z\|$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $\|Ay - Ax\| = \|A(y-x)\| \leq \|A\|\,\|y-x\|$. □

Satz: Sei X ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ ein Paar von Normen darauf. Dann gilt: $\exists\, c, c' \in (0,\infty)$:
$\forall x \in X: \quad c\|x\|' \leq \|x\| \leq c'\|x\|'$.

Bem.: Die Normen heißen dann äquivalent.

Beweis:

- X kann durch die Wahl einer Basis mit dem $\mathbb{K}^n$ identifiziert werden.
- Da die Äquivalenz von Normen transitiv ist, genügt es dies für $\|x\|' = \|x\|_2 := \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right]^{1/2}$ zu zeigen.
- $$\|x\| = \Big\|\sum_{i=1}^n x_i \underset{\substack{\uparrow \\ \|\cdot\|_2\text{-ONB}}}{e_i}\Big\| \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-Ungl.}}}{\leq} \sum_{i=1}^n |x_i|\,\|e_i\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\leq} \|x\|_2 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2}}_{=:\, c'}$$
- $f: x \mapsto \|x\|$ ist Lipschitz-stetig bzgl. $\|\cdot\|_2$, da
$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-Ungl.}}}{\leq} \|x-y\| \leq c'\|x-y\|_2 .$$
- $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ ist kompakt in $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
Damit existiert $\min f(S^{n-1}) =: c \in (0,\infty)$ und es gilt $\forall x \neq 0$:
$\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \geq c$, da $\frac{x}{\|x\|_2} \in S^{n-1}$ für $x \neq 0$.
Demnach ist $\|x\| \geq c\|x\|_2 \quad \forall x \in X$ $\square$

Korollar: Die Eigenschaften Konvergenz, Abgeschlossenheit, Offenheit, Kompaktheit, Stetigkeit und Zusammenhang, hängen in endlich-dim., normierten Vektorräumen nicht von der Wahl der Norm ab.

Erinnerung: ∘ $x: \mathbb{N} \to M$ ist eine Cauchy-Folge im metrischen Raum (M, d), wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k, l > N: d(x_k, x_l) < \varepsilon$

- Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert
- Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt Banachraum.

Nützlich: ∘ Ist Y ein Banachraum, dann auch $\mathcal{B}(X, Y)$ mit der Operatornorm.

Lemma: Für $x: \mathbb{N} \to \mathbb{K}^d$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ gilt mit $\|x\|_\infty := \max\{|x_i|\}_{i=1}^d$:

(i) (x_n) ist Cauchy bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ ist äquivalent zu

(ii) $(x_n)_i$ –"– in $\mathbb{K}$ für alle $i = 1, \dots, d$.

Beweis: (i) ⇒ (ii) folgt aus $|x_{n,i} - x_{m,i}| \leq \|x_n - x_m\|_\infty$

(ii) ⇒ (i) folgt mit der Wahl $N := \max\{N_i\}_{i=1}^d$ □

Satz: Jeder endlich-dim. normierte $\mathbb{K}$-Vektorraum ist vollständig.
(also ein 'Banachraum')

Beweis: (x_n) ist Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|$

⇒ (x_n) –"– $\|\cdot\|_\infty$

⇒ $(x_n)_i$ –"– in $\mathbb{K}$ für alle i

⇒ $(x_n)_i$ konvergiert –"– , da $\mathbb{K}$ vollständig ist

⇒ (x_n) –"– bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

⇒ (x_n) –"– bzgl. $\|\cdot\|$. □