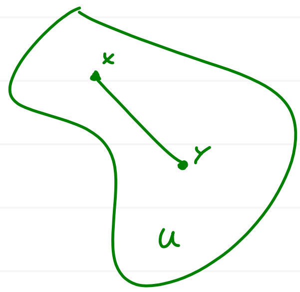
III. Hauptsätze der Differentialrechnung

III.1. Der Schrankensatz

Satz: Sei $f \in C^1(U,Y)$ eine Abb. zw. Banachräumen, wobei $U \subseteq X$ offen ist, und $x,y \in U$ so, dass $[x,y] := \{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\} \subseteq U$. Dann gilt:

$$\| f(y) - f(x) \| \leq \| f' \|_{[x,y]} \, \| y - x \|$$



mit
$$\| f' \|_{[x,y]} := \sup_{z \in [x,y]} \| f'(z) \| = \sup_{z \in [x,y]} \sup_{h \in X} \frac{\| f'(z) h \|}{\| h \|}$$

Beweis: $\Delta := y - x$

$$\begin{aligned}
\| f(x+\Delta) - f(x) \| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t\Delta) \, dt \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 f'(x+t\Delta)\, \Delta \, dt \right\| \\
&\leq \int_0^1 \| f'(x+t\Delta)\, \Delta \| \, dt \\
&\leq \int_0^1 \| f' \|_{[x,y]} \, \| \Delta \| \, dt = \| f' \|_{[x,y]} \, \| \Delta \|
\end{aligned}$$
$\square$

Korollar: C^1-Abbildungen zw. Banachräumen sind auf kompakten, konvexen Mengen Lipschitz-stetig.

Beweis: Betrachte $f \in C^1(U \subseteq X, Y)$ mit U kompakt & konvex.

Dann gilt nach dem vorigen Satz für $x \neq y \in U$:

$$\frac{\| f(y) - f(x) \|}{\| y - x \|} \leq \| f' \|_{[x,y]} \leq \| f' \|_U := \sup_{z \in U} \| f'(z) \| < \infty$$

$f \in C^1$ & U kompakt

$\square$

III.2. Satz über die lokale Umkehrbarkeit

Def.: Sind X, Y Banachräume, $U \subseteq X$ & $V \subseteq Y$ offene Mengen und $f \in C^k(U,V)$, mit $k \geq 1$. f heißt „C^k-Diffeomorphismus" wenn f bijektiv und die Umkehrabbildung $f^{-1}: V \to U$ diff.bar ist.

Lemma: Ist $f: U \subseteq X \to V \subseteq Y$ ein C^k-Diffeomorphismus, so gilt:

(i) $X = \mathbb{R}^m \wedge Y = \mathbb{R}^n \Rightarrow m = n$

(ii) $\forall x \in U$ ist $f'(x)$ ein Vektorraum-Isomorphismus
(d.h. $\det(f'(x)) \neq 0$ im endl. dimensionalen)

(iii) $\forall x \in U: \; f^{-1\,\prime}(f(x)) = (f'(x))^{-1}$

(iv) $f^{-1} \in C^k(V, U)$

Beweis: Aus $f \circ f^{-1} = id_V$ und $f^{-1} \circ f = id_U$ bekommen wir

$f'(x)\, f^{-1\,\prime}(f(x)) = \mathbb{1}_Y$ und $f^{-1\,\prime}(f(x))\, f'(x) = \mathbb{1}_X$, d.h.

$f'(x)$ ist ein Isomorphismus. Dies beweist (i), (ii) & (iii).

Zu (iv): angenommen $f^{-1} \in C^l$ mit $l < k$. Wegen

$f^{-1\,\prime}(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1}$ gilt folgendes „Kommutatives Diagramm":

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f^{-1\,\prime}"] \arrow[d, "f^{-1}"'] & B(Y,X) \\
X \arrow[r, "f'"'] & B(X,Y) \arrow[u, "(\cdot)^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Da $f^{-1} \in C^l$, $f' \in C^{k-1}$ und die Matrixinversion bel. oft diff.bar ist, gilt $f^{-1\,\prime} \in C^l$ also $f^{-1} \in C^{l+1}$ $\square$

Frage: Wenn $f \in C^1(U, f(U))$ und $\det f'(x) \neq 0$ $\forall x \in U$, ist f dann ein Diffeomorphismus, also insbesondere injektiv?

Für $n=1$: Ja, da f streng monoton ist

Für $n \geq 2$: nicht notwendigerweise

Bsp.: „Polarkoordinaten" $f: (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ ist surjektiv & für

$$J_f(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$ gilt $\det(J_f(r,\varphi)) = r \neq 0$.

Jedoch ist f nicht injektiv, da $f(r,\varphi) = f(r, \varphi + 2\pi)$

Aber: f läßt sich „lokal" umkehren, z.B. in $(0,\infty) \times (\varphi + \pi, \varphi - \pi)$ für bel. (r,φ). Hier ist f^{-1} auch stetig diff.bar.

Satz: (Satz über die lokale Umkehrbarkeit)

Sei $U \subseteq X$ offen & $f \in C^k(U, Y)$, so dass $f'(x_0)$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist & $k \geq 1$. Dann gibt es eine offene Umgebung $V \ni x_0$, so dass $f(V)$ offen ist und $f|_V : V \to f(V)$ ein C^k-Diffeomorphismus.

Beweis: O.B.d.A. $x_0 = f(x_0) = 0$ & $f'(x_0) = \mathbb{1}$ (durch Ersetzen von $f(x)$ mit $(f'(x_0))^{-1} f(x)$).

1. Schritt: Wir wollen $y = f(x)$ invertieren. Dazu zeigen wir, dass $h_y(x) := y - f(x) + x$ eine Kontraktion ist und wir den Banach'schen Fixpunktsatz anwenden können. Die Eindeutigkeit des Fixpunktes $h_y(\hat{x}) = \hat{x}$ liefert dann die gewünschte Fkt. $\hat{x}(y)$ mit $f(\hat{x}(y)) = y$.

$$h_y'(0) = 0 \wedge f \in C^1 \Rightarrow \exists r > 0 \; \forall x \in \overline{B_r}(0) : \|h_y'(x)\| \leq \tfrac{1}{2}$$

$$\overset{\text{Schrankensatz}}{\Longrightarrow} \forall x, x' \in \overline{B_r}(0) : \|h_y(x) - h_y(x')\| \leq \tfrac{1}{2} \|x - x'\|$$

D.h. h_y erfüllt die Lipschitzbedingung einer Kontraktion.
Noch z.z. ist, dass h_y dabei einen vollst. metrischen Raum in sich selbst abbildet. Dies folgt aus

$$\|h_y(x)\| \leq \|h_y(x) - h_y(0)\| + \underbrace{\|h_y(0)\|}_{=y} \leq \frac{1}{2}\|x\| + \|y\|$$

D.h. für $y \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}(0)$ ist $h_y : \overline{B}_r(0) \to \overline{B}_r(0)$ eine Kontraktion.

2. Schritt: Wir zeigen Stetigkeit & damit dann Diff.barkeit von $\hat{x}(y)$.
Sei nun $y, y' \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}(0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|\hat{x}(y) - \hat{x}(y')\| &= \|h_y(\hat{x}(y)) - h_{y'}(\hat{x}(y'))\| \\
&\leq \|f(\hat{x}(y)) - \hat{x}(y) - f(\hat{x}(y')) + \hat{x}(y')\| + \|y - y'\| \\
&= \|h_y(\hat{x}(y)) - h_y(\hat{x}(y'))\| + \|y - y'\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|\hat{x}(y) - \hat{x}(y')\| + \|y - y'\|
\end{aligned}$$

Also $\|\hat{x}(y) - \hat{x}(y')\| \leq 2\|y - y'\|$, d.h. $\hat{x}(y)$ ist stetig.

3. Schritt: Um Diff.barkeit z.z. betrachte:

$$\begin{aligned}
\|\underbrace{\hat{x}(y)}_{= x} - \underbrace{\hat{x}(y')}_{= x'} - (f'(x))^{-1}(y - y')\| &= \|x - x' - (f'(x))^{-1}(f(x) - f(x'))\| \\
&\leq \|f'(x)^{-1}\| \, \|f'(x)(x - x') - (f(x) - f(x'))\| \\
&= o(\|x - x'\|) \quad \text{da } f \text{ diff.bar} \\
&= o(\|y - y'\|) \quad \text{da } \hat{x} \text{ stetig}
\end{aligned}$$

$\square$