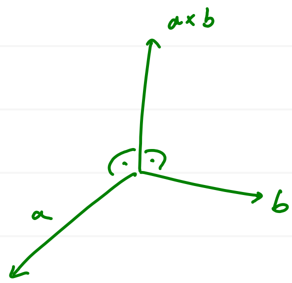
II.12. Nabla Kalkül

Erinnerung:

Für das „Kreuzprodukt" $a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ gilt:



- $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \varphi$
- $a \cdot (a \times b) = b \cdot (a \times b) = 0$
- $a \times b = - b \times a$
- $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$
- $(a \times b)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ mit dem „Levi-Civita-Tensor"

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} +1 & (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123) \\ -1 & \text{—"— ungerade —"— —"—} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir betrachten vier verwandte „Differentialoperatoren":

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\text{Vektorfeld} \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[dr, "\mathrm{div}" near end] & \text{Vektorfeld} \\
\text{Skalarfeld} \arrow[ur, "\mathrm{grad}" near start] \arrow[r, "\Delta"'] & \text{Skalarfeld}
\end{tikzcd}$$

Alle lassen sich mit Hilfe des „Nabla Operators" $\nabla := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$ ausdrücken.

(Dies ist erst einmal eine Kurzschreibweise & noch keine math. Def.)

Der Vollständigkeit halber sei auch an die Def. von Gradient & Laplace-Op. erinnert:

<u>Def.:</u> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}$.

- Der „<u>Gradient</u>" $\mathrm{grad}: C^k(U,\mathbb{R}) \to C^{k-1}(U,\mathbb{R}^n)$ ist definiert als
$$\mathrm{grad}\,\phi := \nabla \phi$$

(Beachte Vorzeichenkonvention in der Physik: wenn $\nabla\phi$ ein Kraftfeld ist, so ist $-\phi$ das zug. Potential)

- Die „<u>Divergenz</u>" $\mathrm{div}: C^k(U,\mathbb{R}^n) \to C^{k-1}(U,\mathbb{R})$ ist definiert als
$$\mathrm{div}\, F := \sum_{i=1}^n \partial_i F_i =: \nabla \cdot F$$

(div F kann als „Quellstärke" interpretiert werden. Ist $\mathrm{div}\, F = 0$, dann heißt F „quellenfrei" bzw. „divergenzfrei")

- Der „<u>Laplace Operator</u>" $\Delta: C^{k+1}(U,\mathbb{R}) \to C^{k-1}(U,\mathbb{R})$ ist definiert als
$$\Delta f := \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f =: \nabla^2 f$$

(Ist $\Delta f = 0$, so heißt f „harmonisch")

- Für $n=3$ ist die „Rotation" $\operatorname{rot}: C^k(U,\mathbb{R}^3) \to C^{k-1}(U,\mathbb{R}^3)$ definiert über $(\operatorname{rot} F)_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k$ also $\operatorname{rot} F = \nabla \times F$.

  (Ist $\nabla \times F = 0$, heißt F „rotationsfrei")

<u>Satz:</u> Ist $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $\phi \in C^2(U,\mathbb{R})$ und $\tilde{F} \in C^2(U,\mathbb{R}^3)$, dann gilt:

(i) $F = \nabla\phi \Rightarrow \nabla \times F = 0$, d.h. Gradientenfelder sind rotationsfrei,

(ii) $F = \nabla \times \tilde{F} \Rightarrow \nabla \cdot F = 0$, d.h. Rotationsfelder sind divergenzfrei.

<u>Beweis:</u> (i) $(\nabla \times F)_i = (\nabla \times (\nabla\phi))_i = \sum_{jk=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = 0$ da $\partial_j\partial_k\phi = \partial_k\partial_j\phi$ und $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$.

(ii) $\nabla \cdot F = \nabla \cdot (\nabla \times \tilde{F}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j \tilde{F}_k = 0$ $\square$

Wiederholung: ∘ Für ein Vektorfeld $F \in C(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gilt:

(i) F ist ein Gradientenfeld, d.h. $\exists\, \phi \in C^1(U, \mathbb{R})$: $F = \nabla \cdot \phi$

$\Longleftrightarrow$ F ist konservativ, d.h. $\oint F(r) \cdot dr = 0$

$\Longleftrightarrow$ $\int_\gamma F(r) \cdot dr$ ist wegunabh.

$\overset{n=3}{\Longrightarrow}$ $\nabla \times F = 0$ (1)

(ii) für $n=3$: $F = \nabla \times \tilde{F} \Rightarrow \nabla \cdot F = 0$ (2)

d.h. Rotationsfelder sind Divergenzfrei

Bemerkung: Das Potential ϕ, bzw. das „Vektorpotential" $\tilde{F}$ sind (wenn F Gradienten- bzw. Rotationsfeld ist) durch F nicht eindeutig bestimmt, da

$$\nabla \cdot \phi = \nabla \cdot (\phi + \text{konstante}), \text{ bzw.}$$

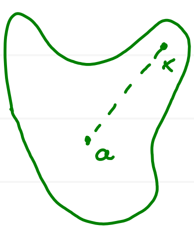
$$\nabla \times \tilde{F} = \nabla \times (\tilde{F} + \nabla f) \quad \forall f \in C^2(U, \mathbb{R}).$$

Die entstehende Freiheit in der Wahl von $\tilde{F}$ nennt man „Eichfreiheit". In der E-dynamik wird z.B. oft die „Coulombeichung" verwendet, die erzwingt, dass $B = \text{rot } A$, so dass $\text{div } A = 0$.

Die Umkehrungen der Implikationen (1) & (2) gelten, wenn U eine zusätzliche Eigenschaft erfüllt, z.B.:

Def.: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt „sternförmig", wenn es ein $a \in U$ gibt, so dass

$$\forall x \in U\ \forall t \in [0,1]: \quad ta + (1-t)x \in U.$$



Beachte: jede konvexe Menge ist sternförmig. (wenn $U \neq \emptyset$)

Satz (Poincaré-Lemma): Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen & sternförmig und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$.

Dann gilt: $\partial_i F_k = \partial_k F_i \quad \forall i,k = 1, \dots, n$

$\iff F$ ist ein Gradientenfeld

Beweis: "$\Leftarrow$": Ist $F = \nabla \phi$, dann gilt: $\partial_i F_k = \partial_i \partial_k \phi = \partial_k \partial_i \phi = \partial_k F_i$

"$\Rightarrow$": O.B.d.A. sei U sternförmig bzgl. des Ursprungs (d.h. $a = 0$).

Definiere $\phi(x) := \int_0^1 F(tx) \cdot x \, dt$. Dann gilt:

$$\partial_k \phi(x) \overset{F \in C^1}{=} \int_0^1 \partial_k \left(\sum_{i=1}^n F_i(tx)\, x_i \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(F_k(tx) + \sum_{i=1}^n t x_i \underbrace{\partial_k F_i(tx)}_{= \partial_i F_k} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(F_k(tx) + t \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i \partial_i F_k(tx)}_{= \nabla F_k(tx) \cdot x} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(F_k(tx) + t \overbrace{\frac{d}{dt} F_k(tx)} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(t F_k(tx) \right) dt = F_k(x)$$

D.h. $F = \operatorname{grad} \phi$. $\square$

Satz: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen & sternförmig und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, so dass $\nabla \cdot F = 0$.
Dann ist $\tilde{F}(r) := \int_0^1 t F(tr) \, dt \times r$ ein Vektorpotential, d.h. $F = \nabla \times \tilde{F}$.

Beweis: Definiere $G(r) := \int_0^1 t F(tr) \, dt$, so dass $\tilde{F}(r) = G(r) \times r$.

$$\partial_2 \tilde{F}_3 - \partial_3 \tilde{F}_2 \overset{\overset{r=(x_1,x_2,x_3)}{\downarrow}}{=} \partial_2 \left(G_1 x_2 - G_2 x_1 \right) - \partial_3 \left(G_3 x_1 - G_1 x_3 \right)$$

$$= 2 G_1 - x_1 \underbrace{\left(\partial_2 G_2 + \partial_3 G_3 \right)}_{= -\partial_1 G_1 \text{ da } \nabla \cdot G = 0 \text{ wegen } \nabla \cdot F = 0} + x_2 \partial_2 G_1 + x_3 \partial_3 G_1$$

$$= 2 G_1 + \sum_{j=1}^{3} x_j \partial_j G_1$$

Für den ersten Term gilt nun:

$$2 G_1 = 2 \int_0^1 t\, F_1(tr)\, dt \quad \text{führt mit part. Int. zu} \ldots$$

$$= \left[t^2 F_1(tr) \right]_0^1 - \int_0^1 t^2 \frac{d}{dt} F_1(tr)\, dt$$

$$= F_1(r) \qquad - \int_0^1 t^2 \sum_{i=1}^{3} x_i \partial_i F_1(tr)$$

$$\underset{\overset{\uparrow}{t (\partial_i F_1)(tr) = \partial_i (F_1(tr))}}{=} F_1(r) \quad - \sum_{i=1}^{3} x_i \partial_i G_1(r)$$

Zusammengenommen ergibt sich also $\partial_2 \tilde{F}_3 - \partial_3 \tilde{F}_2 = F_1$

und durch analoges Betrachten der anderen Komponenten schließlich $\nabla \times \tilde{F} = F$. $\blacksquare$