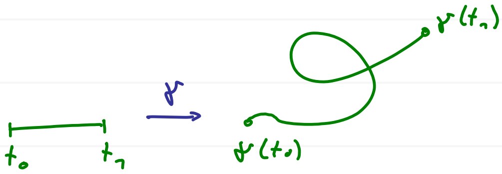
II.11. Kurvenintegrale & Vektorfelder



Def.:

- Eine Abbildung $\gamma \in C^k([t_0,t_1] \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ heißt „C^k-Kurve" oder schlicht „Kurve" wenn $k=0$.

- Eine Kurve $\gamma \in C([t_0,t_1], \mathbb{R}^n)$ heißt „stückweise C^k", wenn sie eine Zusammenstückung von C^k-Kurven $\gamma_i \in C^k([t_{i-1},t_i], \mathbb{R})$ ist. Wir schreiben dann „$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$".

- Eine Kurve $\gamma \in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ heißt „geschlossen" wenn $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ und „regulär", wenn $\dot\gamma(t) \neq 0 \ \forall t \in [t_0,t_1]$ gilt.

- Ist γ stückweise C^1, dann heißt $L(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} \|\dot\gamma(t)\| \, dt$ die „Länge" der Kurve & $s : [t_0,t_1] \to [0, L(\gamma)]$, $s(t) := \int_{t_0}^{t} \|\dot\gamma(\tau)\| \, d\tau$ „Bogenlänge".

Bemerkungen:

- $\dot\gamma(t)$ kann als Geschw.vektor interpretiert werden & $\|\dot\gamma(t)\|$ als die Geschw. mit der die Kurve durchlaufen wird.

- Für reguläre Kurven ist $t \mapsto s(t)$ umkehrbar, da

  $$\dot s(t) = \|\dot\gamma(t)\| > 0.$$

  Ist $\varphi := s^{-1}$, dann nennt man $\Gamma := \gamma \circ \varphi$ die „auf Bogenlänge umparametrisierte Kurve". Für die gilt

$$\|\dot\Gamma(s)\| \overset{\text{Kettenregel mit } t:=\varphi(s)}{=} \|\dot\gamma(t)\,\dot\varphi(s)\| = \|\dot\gamma(t)\|\,|\dot\varphi(s)| \overset{\text{Umkehrregel } |\dot\varphi(s)| = |\dot s(t)|^{-1}}{=} 1$$

d.h. Γ ist die mit „Einheitsgeschw." durchlaufene Kurve.

<u>Def.:</u>

- $F \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ heißt „<u>C^k-Vektorfeld</u>" auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

  (Bsp.: Geschw.feld einer Strömung, Kraftfeld)

- Ist $\phi \in C^1(U, \mathbb{R})$, dann heißt $F(x) := \nabla\phi(x)$ „<u>Gradientenfeld</u>".

  (Bsp.: Gravitationsfeld, elektr. Feld einer Punktladung)

- Ist $F \in C(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und γ eine in U verlaufende C^1-Kurve, dann definiert man das Kurvenintegral von F entlang γ als:

$$\int_\gamma F(r)\cdot dr := \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma(t)) \overset{\text{Skalarprodukt}}{\cdot} \dot\gamma(t)\, dt$$

- Ist $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$ stückweise C^1, dann definieren wir

$$\int_\gamma \ldots := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \ldots$$

- Ist γ geschlossen, macht man dies oft durch „$\oint_\gamma$" deutlich.

<u>Bemerkung:</u> Ist F ein Kraftfeld & $\dot\gamma$ ein Geschw.vektor, dann ist $\int_\gamma F(r)\cdot dr$ die „Arbeit" entlang γ.

Satz: (Parametrisierungsunabhängigkeit von Kurvenintegralen)

Sei: $F \in C(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld, $\gamma \in C^1([t_0, t_1], U)$ und $\tilde{\gamma} \in C^1([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1], U)$ Kurven, so dass $\gamma = \tilde{\gamma} \circ f$ für $f \in C^1([t_0, t_1], [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1])$ mit $f(t_0) = \tilde{t}_0$ & $f(t_1) = \tilde{t}_1$. Dann gilt:

$$\int_\gamma F(r) \cdot dr = \int_{\tilde{\gamma}} F(r) \cdot dr$$

Beweis:

$$\int_\gamma F(r) \cdot dr = \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt \underset{\dot{\gamma}(t) = \dot{\tilde{\gamma}}(f(t))\, \dot{f}(t)}{=} \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma(t))\, \dot{\tilde{\gamma}}(f(t))\, \dot{f}(t)\, dt$$

$$\underset{\tau := f(t)}{=} \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} F(\tilde{\gamma}(\tau)) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}\, d\tau = \int_{\tilde{\gamma}} F(r) \cdot dr$$

Def.: Ein Vektorfeld $F \in C(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ heißt „<u>konservativ</u>", wenn $\oint_\gamma F(r) \cdot dr = 0$ für alle stückweise C^1-Kurven in U gilt.

Satz: (Gradientenfelder sind konservativ)

Sei: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ & $\gamma \in C^1([t_0, t_1], U)$. Dann gilt:

$$\int_\gamma (\nabla \phi)(r) \cdot dr = \phi(\gamma(t_1)) - \phi(\gamma(t_0)).$$

Insbesondere gilt $\oint_\gamma (\nabla \phi)(r) \cdot dr = 0$ für geschlossene Kurven.

Beweis: Nach der Kettenregel gilt $\frac{d}{dt} \phi(\gamma(t)) = \nabla \phi(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$ und damit

$$\int_\gamma (\nabla \phi)(r) \cdot dr = \int_{t_0}^{t_1} (\nabla \phi)(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \phi(\gamma(t))\, dt$$

$$= \phi(\gamma(t_1)) - \phi(\gamma(t_0))$$

Falls $\gamma = \sum_i \gamma_i$ nur stückweise C^1 ist, greift dasselbe Argument mit $\int_\gamma \ldots = \sum_i \int_{\gamma_i} \ldots$. $\square$

Satz (Äquivalenz zw. Konservativität & Existenz eines Potentials):

Für ein Vektorfeld $F \in C(U, \mathbb{R}^n)$ mit $U \in \mathbb{R}^n$ Gebiet, sind äquivalent:

(i) „Wegunabhängigkeit des Integrals" d.h. $\int_\gamma F(r)\cdot dr = \int_{\tilde\gamma} F(r)\cdot dr$ für alle stückweise C^1-Kurven $\gamma, \tilde\gamma \in C([0,1], U)$ mit $\gamma(0) = \tilde\gamma(0)$ & $\gamma(1) = \tilde\gamma(1)$.

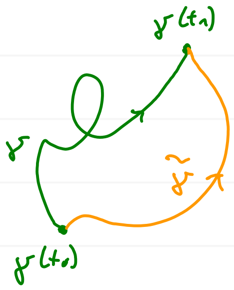
(ii) F ist konservativ

(iii) „Existenz eines Potentials", d.h. $\exists\, \phi \in C^1(U, \mathbb{R}) : F = \nabla\phi$.

Bemerkung: (i) ermöglicht es $\int_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t_1)} F(r)\cdot dr := \int_\gamma F(r)\cdot dr$ nur in Abh. der Randpunkte der Kurve zu definieren.

Beweis: (i) => (ii) Sei $\gamma \in C([0,1], U)$ stückweise C^1 & geschlossen. Dann gilt mit $\tilde\gamma(t) := \gamma(0) = \gamma(1)$, dass $\oint_\gamma F(r)\cdot dr \overset{(i)}{=} \int_{\tilde\gamma} F(r)\cdot dr = 0$

(ii) => (i) Aus $\gamma, \tilde\gamma$ konstruieren wir eine geschlossene Kurve Γ wie folgt. Definiere $\tilde\gamma_- \in C([t_1, 2t_1 - t_0], U)$ als $\tilde\gamma_-(t) := \tilde\gamma(2t_1 - t)$. D.h. $\tilde\gamma_-$ & $\tilde\gamma$ durchlaufen denselben Weg, nur in umgekehrter Richtung. $\Gamma := \gamma + \tilde\gamma_-$ ist demnach geschlossen & es gilt



$$0 \overset{(ii)}{=} \oint_\Gamma F(r)\cdot dr = \int_\gamma F(r)\cdot dr + \int_{\tilde\gamma_-} F(r)\cdot dr$$

$$= \int_\gamma F(r)\cdot dr - \int_{\tilde\gamma} F(r)\cdot dr$$

(iii) => (i) ist der vorige Satz.

(i) => (iii) Wähle $x_0 \in U$ & definiere $\phi(x) := \int_{x_0}^{x} F(r)\cdot dr$. Dann ist

$$\phi(x+\Delta) - \phi(x) - F(x)\cdot\Delta = \int_x^{x+\Delta} F(r)\cdot dr - F(x)\cdot\Delta$$

$$= \int_x^{x+\Delta} (F(r) - F(x))\cdot dr \qquad (*)$$

Letzteres gilt da $F(x) =: \tilde{F}$ konstant bzgl. r ist und mit $\gamma(t) := x + t\Delta$ gilt

$$\int_x^{x+\Delta} \tilde{F} \cdot dr = \int_0^1 \tilde{F} \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^1 \tilde{F} \cdot \Delta\, dt = \tilde{F} \cdot \Delta .$$

Es gilt also $$\frac{\| \phi(x+\Delta) - \phi(x) - F(x) \cdot \Delta \|}{\|\Delta\|} \overset{(*)}{=} \frac{\| \int_0^1 \big(F(x+t\Delta) - F(x)\big) \cdot \Delta\, dt \|}{\|\Delta\|}$$

$$\leq \int_0^1 \| F(x+t\Delta) - F(x) \|\, dt \to 0 \quad \text{für } \Delta \to 0 \qquad \square$$

Bemerkung: $\phi(x) := \int_{x_0}^{x} F(r) \cdot dr$ spielt die Rolle einer „Stammfunktion" die sich so also nur für Gradientenfelder definieren läßt.