II.10. Ableitung parameterabhängiger Integrale

Bemerkung: Ist $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ eine vektorwertige Fkt. dann ist $\int g(t)\,dt$ komponentenweise zu verstehen, d.h. $\int g(t)\,dt = \left(\int g_1(t)\,dt, \dots, \int g_m(t)\,dt\right)$

Satz: Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $a<b$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F: [a,b] \times U \to \mathbb{R}^m$ stetig.
Für $f(x) := \int_a^b F(t,x)\,dt$ gilt dann:

(i) f is stetig auf U.

(ii) Existiert die partielle Abl. $(t,x) \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} F(t,x)$ und ist stetig auf $[a,b] \times U$, dann ist auch f auf U stetig part. nach x_i diff.bar und

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} F(t,x)\,dt,$$

d.h. Integration & Differentiation vertauschen.

Beweis: (i) Betrachte eine konvergente Folge $x_k \to x$ mit $x_k, x \in U$. Dann ist $V := [a,b] \times \left(\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{x\}\right)$ wegen Konvergenz von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sowohl beschränkt als auch abgeschlossen (da alle Grenzwerte enthalten sind).
D.h. $V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, ist kompakt und die Einschränkung $F|_V$ damit gleichmäßig stetig. D.h. auf V gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$\|(t,x) - (t',x')\| < \delta \Rightarrow \|F(t,x) - F(t',x')\| < \varepsilon.$$

Wegen Konvergenz gibt es ein N, so dass $\forall k > N$: $\|(t,x_k) - (t,x)\| < \delta$ & daher $\|F(t,x_k) - F(t,x)\| < \varepsilon$ für alle $t \in [a,b]$ und $k > N$.
Damit konvergiert die Funktionenfolge $F_k(t) := F(t,x_k)$ gleichmäßig, so dass

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} \int_a^b F_k(t)\,dt = \int_a^b \lim_{k\to\infty} F_k(t)\,dt = \int_a^b F(t,x)\,dt = f(x).$$

Dies beweist Stetigkeit auf ganz U, da x ein bel. Punkt in U ist.

(ii) $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ ergibt sich im Limes $\eta \to 0$ des folgenden Ausdrucks:

$$\frac{1}{\eta}\left(f(x+\eta e_i) - f(x)\right) = \int_a^b \frac{F(t, x+\eta e_i) - F(t,x)}{\eta}\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} F(t, x+\xi e_i)\, dt$$

für ein $\xi \in [0,\eta]$ als Folge des MWS.

Die Vertauschung von Limes & Integration folgt dann wie in (i), nur jetzt für $\frac{\partial}{\partial x_i} F$ anstatt für F. $\square$

Bsp. eines parameterabh. Integrals: „Besselfunktion"

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)\, dt \quad , n \in \mathbb{Z}$$

J_n löst die „Bessel'sche DGL" $\quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$

Diese beschreibt z.B. Eigenschwingungen bei Zylindersymmetrie (Musikinstrumente, Wasserwellen in Regentonne, etc.)

Korollar: (Satz von Fubini - 1. Version)

Ist $F: [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{R}^m$ stetig, dann gilt:

$$\int_c^d \left(\int_a^b F(x,t)\, dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d F(x,t)\, dx \right) dt$$

Beweis: Definiere $f_1(\xi) := \int_c^\xi \left(\int_a^b F(x,t)\, dt \right) dx$, $f_2(\xi) := \int_a^b \left(\int_c^\xi F(x,t)\, dx \right) dt$

wobei $\xi \in [c,d]$. Beide Integranden sind stetig.

Nach HDI gilt $f_1'(\xi) = \int_a^b F(\xi,t)\, dt$ und wegen Vertauschbarkeit von $\frac{\partial}{\partial \xi}$ mit $\int$ auch $f_2'(\xi) = \int_a^b F(\xi,t)\, dt$. Demnach ist $f_1' = f_2'$ & wegen $f_1(c) = f_2(c) = 0$ auch $f_1 = f_2$.

$\square$

<u>Beweis:</u> $$|R_p(x,a)| = \frac{1}{(p+1)!} \left| f^{(p+1)}(\xi)(x-a)^{p+1} \right|$$
$$\leq \frac{\| f^{(p+1)}(\xi) \|}{(p+1)!} \| x-a \|^{p+1} \quad \text{wobei}$$
$$\| f^{(p+1)}(\xi) \| := \sup_{\{\Delta^{(i)} \in \mathbb{R}^n\}} \left\{ \frac{| f^{(p+1)}(\xi)(\Delta^{(1)}) \cdots (\Delta^{(p+1)}) |}{\prod_{i=1}^{p+1} \| \Delta^{(i)} \|} \right\} < \infty$$

wegen Beschränktheit der Ableitung. Dies hängt stetig von ξ ab.

Damit ist $c(x) := \sup_{\xi \in [a,x]} \| f^{(p+1)}(\xi) \| < \infty$ monoton fallend für $x \to a$.

Wegen $|R_p(x,a)| \leq \frac{c(x)}{(p+1)!} \| x-a \|^{p+1}$ folgt die Behauptung. □

<u>Def.:</u> Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$, dann heißt f in U „<u>reell analytisch</u>", wenn es zu jedem $a \in U$ eine Umgebung V gibt, so dass $\forall x \in V$ gilt:
$\lim_{p \to \infty} T_p f(x,a) = f(x)$.

<u>Bem.:</u> Die Region in $\mathbb{R}^n$, in der die Taylorreihe gegen f konvergiert, muß weder ein Quader noch eine Kugel sein. z.B. ist

$$(1-x_1-x_2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (x_1+x_2)^k$$ Taylorreihe um $(0,0)$, welche genau für $|x_1+x_2| < 1$ konvergiert.

<u>Def.:</u> Sei $f \in C^2(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $x \in U$. Die $n \times n$ Matrix
$H := H_f(x) := \left(\partial_i \partial_j f(x) \right)_{i,j=1\ldots n}$ heißt <u>Hesse Matrix</u> von f bei x.

<u>Bem.:</u>
- Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung liefert:

$$f(x+\Delta) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x) \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x) \Delta_i \Delta_j + R_2(x,\Delta)$$
$$= f(x) + \langle \nabla f(x), \Delta \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta, H \Delta \rangle + R_2(x,\Delta)$$

- $f \in C^2$ garantiert nach dem Satz von Schwarz, dass $H = H^2$.

Erinnerung: Eine sym. Matrix $H = H^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und die zugehörige Quadratische Form $Q(v) := \langle v, Qv \rangle$ heißen

- positiv definit "$H > 0$" $\iff \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus 0: \; Q(v) > 0$
  $\iff$ die Eigenwerte λ_i von H erfüllen $\lambda_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
- positiv semidefinit "$H \geq 0$" $\iff \forall v \in \mathbb{R}^n: \; Q(v) \geq 0$
  $\iff \lambda_i \geq 0 \quad \forall i$
- analog definiert sind negativ (semi) definit.
- definit $:=$ positiv oder negativ definit
- indefinit $:=$ nicht definit

Lemma: Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$ partiell diff.bar. Wenn f bei x_0 ein lokales Extremum annimmt, dann gilt $\nabla f(x_0) = 0$.

Bem.:
- „lokales Extremum" bei x_0 bedeutet, dass es eine Umgebung V von x_0 gibt in der f bei x_0 ein Min./Max. annimmt.
- Wenn $\nabla f(x_0) = 0$, dann heißt x_0 stationärer Punkt (synonym: kritischer Punkt) von f.

Beweis: $g(t) := f(x_0 + t e_i)$ hat bei $t = 0$ ein lokales Extremum. Also ist $0 = g'(0) = \langle \nabla f(x_0), e_i \rangle$. $\square$